中国科学院先进制造研究与发展创新基金支持项目

整数规划基础

聂义勇　贵　刚　宋　翔　编著

东北大学出版社

内容提要

本书较全面地阐述了整数规划的割平面法、分支定界法、隐式枚举法、不完全枚举法、动态规划法及若干特殊问题的特殊方法。作为离散规划的一种基础，本书着重介绍了连续规划的单纯形法及其发展、多目标规划及其发展，以及矩阵博弈。本书可作为运筹学、管理科学、应用数学等专业大学生、研究生的教材；也可作为相关专业科研、教学人员参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

整数规划基础/聂义勇，贵刚，宋翔编著．—沈阳：东北大学出版社，2001.10
ISBN 7-81054-663-5

Ⅰ.整…　Ⅱ.①聂…②贵…③宋…　Ⅲ.整数规划-高等学校-教材　Ⅳ.O221.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 064219 号



©东北大学出版社出版
(沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号　邮政编码 110004)
电话：(024)23890881　传真：(024)23892538
网址：http://www.neupress.com　E-mail：neuph@neupress.com

沈阳农业大学印刷厂印刷　东北大学出版社发行

开本：787mm×1092mm　1/16　字数：382 千字　印张：15
2001 年 10 月第 1 版　2001 年 10 月第 1 次印刷

责任编辑：张德喜　责任校对：米　戎
封面设计：唐敏智　责任出版：杨华宁

定价：25.00 元

目　　录

1 整数规划实例

1.1 整数规划的概念

任何具有极大和极小目标的决策问题都可以归结为一个整数最优化问题,其中(可量化)决策变量必须假定为非分数或离散值。一般地说,整数问题可以有约束或无约束,表示目标和约束的函数可以是线性或非线性。在严格意义下,每个整数问题都应当被看作非线性的,因为它的函数仅仅被定义为变量的离散值。然而,从研究整数问题解法的观点看,更有意义的分类是忽略这种技术细节。亦即,一个整数问题被归类为线性的,在放松变量的整数限制后函数是严格线性的。否则,问题是非线性的。以后将看出这种分类是研究整数问题解法的重要基础。其实,这个领域的多数研究集中在线性问题,本质上是由于它相对容易些。

上述意义下的整数最优化不是一个新的数学题目,但直到 20 世纪 40 年代末及 50 年代初运筹学广泛应用之前,多数被研究的问题基本上是纯数学的。例如 n 个平面将三维空间分成最多块数的问题,及平面地图着色使之用最少颜色区分任何两个具有公共边界段区域的问题。可惜,不像连续数学那样,很少有整数最优化的统一理论产生,而只是研究一些特殊情况。

整数最优化对解决实际问题的重要性逐渐在运筹学领域令人信服地显示出来。然后,研究人员和专家都认识到求解若干或全部决策变量为整数的规划模型的必要。虽然各种应用领域的若干重要问题形成过整数模型,但第一个求解线性整数问题的有限整数规划技术是 1958 年由 Gomory 研究出来的。从此以后,其他算法被陆续研究出来。

1.1.1 整数规划的数学定义

一般的整数规划可定义为:

$$\max(\text{or } \min) z = g_0(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$\text{s.t.} \quad g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \begin{Bmatrix} \leqslant \\ = \\ \geqslant \end{Bmatrix} b_i,\ i \in M \equiv \{1, 2, \cdots, m\}$$

$$x_j \geqslant 0,\ j \in N \equiv \{1, 2, \cdots, n\}$$

$$x_j \text{integer},\ j \in I \subseteq N$$

如果 $I = N$,即所有的变量被限制于整数值,则问题叫做纯整数规划。否则,若 $I \subset N$,则当做混合问题处理。纯规划和混合规划的概念有时被推广到约束的松弛变量。以后在多数情形下不再特别说明。

整数规划领域中多数研究集中在 g_i 为线性函数,$i \in \{0\} \cup M$,为标准化起见,线性问题被写成

$$\max(\text{or } \min) z = \sum_{j \in N} c_j x_j$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{j\in N} a_{ij}x_j + s_i = b_i,\ i\in M$$
$$s_i \geqslant 0,\quad i\in M$$
$$x_j \geqslant 0,\quad j\in N$$
$$x_j \text{integer},\quad j\in I\subset N$$

其中 s_i 是松弛变量。如果约束本来是等式,则没有辅助的松弛变量。

去掉整数性条件,则问题变成(连续)线性或非线性规划。换句话说,整数规划是在连续可行解空间的离散点集内寻找最优点。

表面上看,附加整数性条件似乎不应该成为严重问题。实际上解空间在附加条件后也"较好"确定,因为人们不再需要在无穷的连续点集内"搜索"(为简单起见,假定连续空间是有界的)。虽然整数问题的解空间在结构上比连续问题好确定,但计算起来已证明是可怕的。尽管持续不断的理论研究已有几十年时间,加之数字计算机速度和功能的惊人增加,研究的整数规划算法还是没产生满意的结果。

本质的事实是整数性条件常常破坏解空间的"好"特性。典型的示例是整数线性规划。去掉整数性条件,解空间是凸的。这个最基本的特性导出线性规划中极成功的单纯形法。

由于线性和非线性连续规划的成功,差不多所有的整数规划算法基本上是把离散空间转换为等价的连续空间。这一般是修改原始的连续解空间,使得所希望的最好整数点被挑选出来。即使连续空间不可用(如全是二进制变量的问题),其解法通常还是可以被追溯到连续问题。

直接从离散变量的有限点集出发考虑解法的代表是枚举法。但完全枚举(或称穷举)会带来组合爆炸。本质上的完全枚举(如隐式枚举)也没有摆脱组合爆炸的阴影。不完全枚举法是多项式时间算法,甚至是与变量数目无关的算法,但其解通常是统计意义下的近似解,需要估计它为最优解的概率或/及它不为最优解时的误差。

1.1.2 连续最优解舍入到整数解

对整数规划程序的失望导致多数潜在用户避免使用它们。结果,有些人相信先用连续模型然后舍入结果可以更好地解决问题,即使得不到最优解,也可以迅速而"自动"地获得一个好解答。毕竟,各种模型参数的少许误差应该是允许的,这样使"最优"解有点柔性。

舍入的思想不是毫无是处,至少临时应急(如单方向地舍或入)及面临判断"一个"解或无解时可取。然而,人们决不要误认为每个整数问题都可以按这种方式处理。舍入的结果通常不再是整数规划的一个可行解;并且随着决策变量的增加,"舍"或"入"的可能性按 2 的指数增长,再快的计算机也没法计算和比较舍入后的结果。

一般来说,对整数规划而言,连续最优解舍入到整数解不是一个可取的近似方法。

下面例举一些典型的整数规划问题,这些实例都具有明确的数学模型。还有许多整数规划问题很难用数学语言描述,或者很难找到恰当的数学描述方式,这有待于自然科学与人文科学的发展。

1.2 单次装载问题

有一辆卡车的最大载重为 b,现有 n 种货物可供装载。设 $j^{\#}$ 货物每件重量为 a_j,每件装

载收费为 $c_j(j=1,\cdots,n)$。试问:应采用怎样的装载方案才能使卡车一次载货的收入最大?

解　设 x_j 表示卡车装载 $j^{\#}$ 货物的件数。于是,可得下面的整数规划问题:

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant b$$

$$x_j \geqslant 0, \text{整数}, j=1,\cdots,n$$

其中约束条件 $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant b$ 表示卡车装载货物的总重量不应超过卡车的最大载重量。

1.3　产销平衡的运输问题

设某种物品有 m 个产地 $A_1, A_2, \cdots, A_m$;n 个销地 $B_1, B_2, \cdots, B_n$。A_i 地的产量为 a_i, $i=1,2,\cdots,m$;B_j 处的需求量为 b_j, $j=1,2,\cdots,n$。由 A_i 运往 B_j 单位产品的运费为 c_{ij}, $i=1,2,\cdots,m$, $j=1,2,\cdots,n$。

不妨假定 $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$。对所有 i 和 j, $a_i, b_j>0$。如果 $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$,即供过于求时,可假设有一虚拟的销地 B_{n+1}, $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$,且 $c_{i,n+1}=0$, $i=1,2,\cdots,m$。若 $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$,则问题无解。试求:产销平衡条件下总运费最小的调运方案。

下面来建立这个问题的数学模型。

设从第 i 个产地到第 j 个销地的物质运输量为 x_{ij},则目标函数为

$$\min z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

约束条件是

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$$

又由于产销平衡,因此有

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

该模型是线性规划模型,它有 $m \times n$ 个变量, $m+n-1$ 个独立约束方程。从模型可知,运输问题的约束方程组的系数矩阵具有以下形式:

$$
\left[\begin{array}{ccccccccccccc}
x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & \cdots & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \\
1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & & & & 1 & & & & \cdots & 1 & & & \\
 & 1 & & & & 1 & & & \cdots & & 1 & & \\
 & & \ddots & & & & \ddots & & & & & \ddots & \\
 & & & 1 & & & & 1 & \cdots & & & & 1
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} m\text{ 行} \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n\text{ 行}
\end{array}
$$

上述矩阵中的元素均为 0 或 1(其中零元素未写);矩阵的每一列中正好有两个非零元素,每个变量在前 m 个约束方程中出现一次,在后 n 个约束方程中出现一次。

由于运输问题的特定结构形式,因此对它有较单纯形法更为简单的求解方法——表上作业法,表上作业法的实质仍是单纯形法,这里不再介绍,有兴趣者可参考有关资料。

运输问题还有一个更为重要的性质,这就是:如果 a_i, b_j 都是整数,那么最优解中,x_{ij} 也必为整数值。利用这个特点,可以将很多其他类型的整数规划问题化为运输问题来求解,不用特别增加整数限制条件,结果可自然满足整数要求。运输问题的上述特性给求解某些整数规划问题带来了很大方便。

1.4 工厂选址问题

某地区有 m 座煤矿,$i^{\#}$ 矿每年产量为 a_i 吨,现有火力发电厂一个,每年需用煤 b_0 吨,每年运行的固定费用(包括折旧费,但不包括煤的运费)为 h_0 元。现规划新建一个发电厂,m 座煤矿每年开采的原煤将全部供给这两个电厂发电用。现有 n 个备选的厂址。若在 $j^{\#}$ 备选厂址建电厂,每年运行的固定费用为 h_j。每吨原煤从 $i^{\#}$ 矿运送到 $j^{\#}$ 备选厂址的运费为 c_{ij} $(i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n)$。每吨原煤从 $i^{\#}$ 矿运送到原有电厂的运费为 c_{i0} $(i=1,\cdots,m)$。试问:应把新厂厂址选在何处,m 座煤矿开采的原煤应如何分配给两个电厂,才能使每年的总费用(电厂运行的固定费用与原煤运费之和)为最小?

解 易知新建电厂每年用煤量为 $b = \sum_{j=1}^{m} a_i - b_0$。

令决策变量

$$
y_j = \begin{cases} 1, & j^{\#}\text{备选厂址被选中;} \\ 0, & \text{否则。} \end{cases} \qquad j=1,2,\cdots,n
$$

为了方便,称原有电厂为 $0^{\#}$ 厂,在 $j^{\#}$ 备选厂址处建的新厂为 $j^{\#}$ 厂。设 x_{ij} 为每年从 $i^{\#}$ 矿运送到 $j^{\#}$ 厂的原煤数量$(i=1,\cdots,m;\ j=0,1,\cdots,n)$。于是,每年总费用等于

$$
z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} h_j y_j + h_0
$$

若 $j^{\#}$ 备选厂址未被选中,即 $y_j=0$,那么 $j^{\#}$ 厂根本就不存在,这时 x_{ij} 应全为零。故有下列约束条件:

$$\sum_{j=0}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = 1,2,\cdots,m,$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{i0} = b_0,$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = by_j,\ j = 1,2,\cdots,n,$$
$$x_{ij} \geqslant 0,\ i = 1,2,\cdots,m;\ j = 1,2,\cdots,n.$$

又因为现在只要新建一个电厂,故还有下述约束条件:

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

于是,上述选址问题可以归纳成下列形式的整数规划:

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} h_j y_j + h_0$$
$$\text{s.t.} \sum_{j=0}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = 1,2,\cdots,m,$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{i0} = b_0,$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = by_j,\ j = 1,2,\cdots n,$$
$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1,$$
$$x_{ij} \geqslant 0,\ y_j = 0,1 \cdot i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n.$$

1.5 背包问题

形式最简单的整数规划问题是背包问题:一个背包的容积为 $V>0$,现有 n 种物品可装,物品 j 的重量为 $w_j>0$,体积为 $v_j>0, j\in N, N=\{1,\cdots,n\}$。问如何配装,既使得不超过背包的容积,且使装的总重量最大。

设变量

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{物品 } j \text{ 被装入背包,} \\ 0, & \text{物品 } j \text{ 不装入背包。} \end{cases}$$

则背包问题可写成如下的 0-1 规划的形式:

求
$$\max \boldsymbol{wx} = \sum_{j\in N} w_j x_j,$$

满足

$$\boldsymbol{vx} = \sum_{j\in N} v_j x_i \leqslant \boldsymbol{V},$$
$$x_j \text{ 取 } 0 \text{ 或 } 1,\ j \in N.$$

记背包问题的允许解集合为 S。不妨可设 $v_j \leqslant \boldsymbol{V}, j\in N$。(若有 $v_j > \boldsymbol{V}$,则必有 $x_j=0$),且 $\sum_{j\in N} v_j > \boldsymbol{V}$(否则,必有 $x_j=1, j\in N$)。

1.6 旅行售货员问题

在城市 v_1 的一位旅行售货员计划去城市 $v_2, v_3, \cdots, v_n$ 推销商品，然后返回 v_1。设 c_{ij} 为从城市 v_i 到城市 v_j 需要的时间($i, j = 1, \cdots, n$; $i \neq j$)。试问：这位旅行售货员应如何计划旅行路线，以便一方面保证对每个城市恰好进行一次访问，另一方面在旅途上花费的时间又最少？

解 令决策变量

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若在旅行路线中有从 } v_i \text{ 到 } v_j \text{ 的行程,} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

因此，目标函数为：

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij},$$

其中 $c_{ii}(i = 1, \cdots, n)$可取为一个充分大的正数 M。(请读者想一想，为什么?)

由于旅行售货员在旅途中恰有一次以 v_i 为起点的行程，故应有：

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \ i = 1, \cdots, n.$$

同样，恰有一次以 v_j 为终点的行程，故应有：

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, j = 1, \cdots, n.$$

但是，满足这些约束条件的解，不一定是售货员的一条旅行路线。因为，有可能出现多回路的“分割”现象(见图 1.1)。

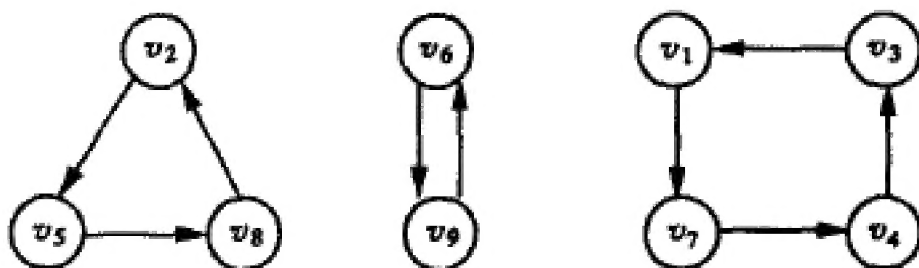


图 1.1

为了避免这种“分割”现象的出现，还需增加一些约束条件。我们要求任意两个不同的城市 v_i 和 v_j 之间都有相应的旅行路线把它们连接起来，或者把几个城市任意分成两组 Q 和 $\overline{Q}$ 后，在旅行路线中一定要存在以 Q 中某个城市 v_i 为起点，以 $\overline{Q}$ 的某个城市 v_j 为终点的一个行程。若以 Q 表示集合$\{1,2,\cdots,n\}$的任一个非空真子集，$\overline{Q} = \{1,2,\cdots,n\} - Q$，则上述要求可用下面的约束条件来表示：

$$\sum_{i \in Q} \sum_{j \in \overline{Q}} x_{ij} \geqslant 1$$

Q 为$\{1,2,\cdots,n\}$的任一非空真子集。由于 n 个元素组成的集合$\{1,2,\cdots,n\}$共含有 2^{n-1}个非空真子集，因此把 n 个城市分成两组 Q 和 $\overline{Q}$ 共有 2^{n-1}种分法。换言之，这类约束条件共有 2^{n-1}个。

于是，旅行售货员问题可以写成下列形式的 0-1 规划问题：

$$\min z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = 1,\cdots,n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = 1,\cdots,n,$$

$$\sum_{i\in Q}\sum_{j\in \bar{Q}} x_{ij} \geqslant 1, Q \subset \{1,2,\cdots,n\},$$

$$x_{ij} = 0,1, \quad i,j = 1,\cdots,n.$$

1.7 套裁下料问题

看一个经典的线性规划实例：钢筋下料。设钢筋的原材料长度为 l。要利用这些钢筋下长度分别为 $l_1,\cdots,l_m$ 的毛坯料。假设毛坯料长 l_i 的需要量为 b_i，问应该采用何种下料方式，才能既满足需要，又使使用的钢筋根数最少？

用非负的整数向量 $\boldsymbol{P}_j=(a_1,a_2,\cdots,a_{mj})^{\mathrm{T}}$ 表示对一根钢筋的第 j 种下料方式，其中 a_{ij} 表示下毛料 l_i 的数目。则所有的向量 $\boldsymbol{P}_j$ 必须满足条件 $\sum_{i=1}^{m} l_i a_{ij} \leqslant 1$，所有 a_{ij} 为非负整数。反之，满足条件的任何向量 $\boldsymbol{P}_j$ 都对应着一种下料方式。特别地，令

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix} a_{11}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix} 0\\ a_{22}\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}, \cdots, \quad \boldsymbol{P}_m=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ \vdots\\ a_{mm}\end{pmatrix}$$

其中

$$a_{ii}=\left\lfloor \frac{l}{l_i} \right\rfloor, i=1,2,\cdots,m$$

数 $\lfloor r \rfloor$ 表示不超过 r 的最大整数。$\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{P}_m$ 表示只下一种毛料的方式。

设采用方式 $\boldsymbol{P}_j$ 下料的钢筋总数为 x_j，则上述问题可写成如下形式

求 $$\min \sum_j x_j$$

满足条件

$$\sum_j a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1,2,\cdots,m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}l_i \leqslant l, \text{对所有的方式 } j,$$

a_{ij} 为非负整数，

$x_j \geqslant 0$，对所有的方式 j。

习 题

1．明年1月，某工厂准备在甲、乙、丙三种产品中选择两种产品投产，它们都需要经过三道工序加工，有关数据如下表：

加工时间/(小时/件)		产品			生产能力/小时
		甲	乙	丙	
工序	A	3	2	1	1800
	B	1	1	2	2000
	C	1	3	1	1600
成本/(元/件)		50	80	60	
售价/(元/件)		200	300	250	

甲、乙、丙产品在投产时,无论生产数量有多大,都需要固定费用(例如装夹具的设计制作费)。假定三种产品的固定费用分别为1500元,2000元和1800元,问如何安排生产可使工厂获得的利润最大?试建立整数规划模型。

2.(选择性约束条件问题)某厂生产第 j 种产品的数量为 $x_j(j=1,2,3)$,其材料可在甲及乙中选择一种,材料消耗的约束条件分别为

$$2x_1+5x_2+6x_3\leqslant 180 \quad 及 \quad 4x_1+3x_2+5x_3\leqslant 300$$

(其他资源约束未列出)。试问这类选择性约束条件如何体现在模型中?

3.怎样利用0-1变量,将下列情况表成线性约束条件:

(1) 下列四个约束条件中,至少必须满足3个:

$$x_1+x_2\leqslant 5,\ x_2\leqslant 3,\ x_3\leqslant 5, x_3+x_4\leqslant 7。$$

(2) 对四个非负的变量 x_1,x_2,x_3 和 x_4,有:

或者 $x_1=0,x_2=0$,或者 $x_3=0,x_4=0$。

(3) x_3 只能取值0,5,6和12。

(4) 当 $x_1+3x_2+4x_3\leqslant 18$ 时,或有 $6\leqslant x_1\leqslant 8$,或有 $x_1=0$;

而当 $19\leqslant x_1+3x_2+4x_3$ 时,或有 $10\leqslant x_1\leqslant 20$,或有 $x_1=0$。

4.用编号为1,2,3,4的四种机床生产三种产品1,2,3,这三种产品的工艺路线及工序加工时间如下表所示:

工艺路线		$j^{\#}$机床加工时间/小时			
		1	2	3	4
$i^{\#}$产品	1	a_1 →	→	→ a_3 →	→ a_4
	2	b_1 →	→ b_2 →	→	→ b_4
	3		c_2 →	→ c_3	

由于不同的产品需要不同的装夹具,所以每台机床必须先将一件产品完成,而后才能加工后面的产品。此外,还要求产品B开始加工到完成,经历时间不得超过 d 小时。问如何确定各产品在机床上的加工顺序,使在最短的时间内制成全部产品。

5.(利润分段线性问题)某厂生产甲、乙两种产品,需经过金工和装配两个车间加工,有关数据如下表:

每件产品加工时间/小时		产品		总有效工时
		甲	乙	
车间	金工	4	3	480
	装配	2	5	500
售价/(元/件)		300	520	

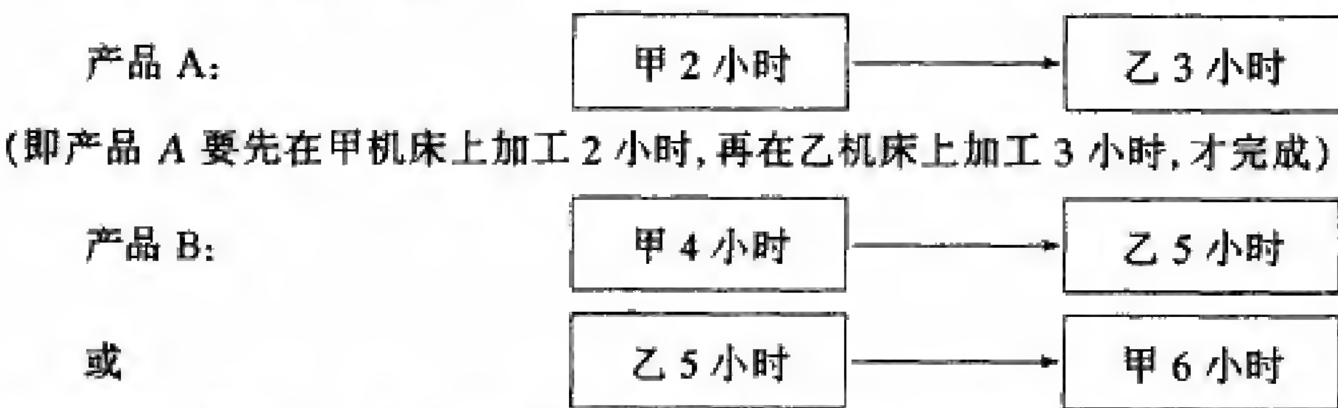
产品乙每件生产成本为400元。试根据产品甲生产成本的下列两种情况分别建立整数规划的模型:

(1)产品甲的生产成本是分段线性的,即第1件至第30件,每件成本为200元;第31件至第70件,每件

成本为 195 元；从第 71 件开始，每件成本为 190 元。

(2)产品甲的产量不超过 40 件时，每件成本为 200 元，但若超过 40 件，则甲的全部产品统算在一起，每件成本为 195 元。

6. 用甲、乙两台机床生产 A，B 两个产品，这两个产品在甲、乙两台机床上的加工顺序及加工工时如下：



(即产品 A 要先在甲机床上加工 2 小时，再在乙机床上加工 3 小时，才完成)

每台机床只能在加工好一个产品以后，再加工另一个产品，试列出线性整数规划模式，以确定 A，B 在甲、乙两台机床上的加工顺序，使在最短时间内完成 A，B 产品。

7.(装配线平衡问题)若某工厂的产品的装配线由 6 道工序组成，各工序的加工时间及工序前后顺序如下表：

工　序	加工时间/分钟	前道工序
1	3	
2	5	
3	2	2
4	6	1,3
5	8	2
6	3	4

若这条装配线设若干工作站。被装配的产品在这些编了号的工作站上流水移动时，每个工作站都要完成一道或几道工序。我们假定：在任一给定的工作站上，不管完成哪些工序，能用的总时间不得超过 10 分钟。问最少应设立几个工作站？每个工作站完成哪些工序？建立整数规划模型。

8. 尝试从自己有关课题中提炼整数规划数学模型。

2 单纯形法

几十年来的大量使用所取得的效果表明，单纯形法是一个好算法，效率很高。到目前为止，还未碰到过用它算不出来的线性规划问题。

1972 年，克利(Klee)和明地(Minty)人为地设计出了一些线性规划问题，用单纯形法来求解它们，效果非常不好，计算时间随问题规模的增长而成倍地增加！

可大量实践表明单纯形法是一个好算法。1983 年，著名数学家——菲尔兹奖得主斯梅尔(Smale)——从理论上证明，使单纯形法“失灵”的那些线性规划问题在实际中出现的可能性是微乎其微的。实践也表明，这类问题难得碰上，事实上就没有碰到过。因此从概率意义上讲，尽可以放心地使用单纯形法。

2.1 线性规划基本概念

线性规划问题的标准形式为

求

$$\max x_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \tag{2.1.1}$$

满足条件

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1,2,\cdots,m, \tag{2.1.2}$$

$$x_j \geqslant 0,\ j = 1,2,\cdots,n. \tag{2.1.3}$$

其中的 c_j, a_{ij}, b_i 都是已知的实数，x_j 是未知量。式(2.1.1)称为目标函数，式(2.1.2)和(2.1.3)称为约束条件。满足方程组(2.1.2)的解 $\{x_1,\cdots,x_n\}$，若同时又满足条件(2.1.3)，则称其为允许解。使目标函数 x_0 的值达到最大的允许解，称为最优解。利用向量和矩阵的符号，记

$$\boldsymbol{C} = (c_1,\cdots,c_n),$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11},\cdots,a_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1},\cdots,a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_i = (a_{i1},\cdots,a_{in}), \quad i = 1,2,\cdots,m,$$

$$\boldsymbol{P}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad j = 1,2,\cdots,n,$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

则式(2.1.1)至(2.1.3)可写成

求 $$\max\ x_0 = Cx,$$
满足条件
$$A_i x = b_i,\quad i = 1,2,\cdots,m,\quad x \geqslant 0.$$
或者写为

求 $$\max\ x_0 = Cx,$$
满足条件
$$\sum_{j=1}^{n} x_j P_j = b,\quad x_j \geqslant 0,\quad j = 1,2,\cdots,n.$$
或者简单地写为

求 $$\max\left\{x_0 \mid x_0 = Cx,\ Ax = b,\ x \geqslant 0\right\}.$$

假如所给问题的目标函数是求 $\min Cx$，则可等价地化为求$\{-\max(-Cx)\}$。假如所给问题的约束条件中含有不等式
$$A_i x \leqslant b_i,\quad \text{或}\quad A_i x \geqslant b_i,$$
则可等价地化为如下的等式条件
$$A_i x + x_{n+1} = b_i,\quad x_{n+i} \geqslant 0,$$
或
$$A_i x - x_{n+i} = b_i,\quad x_{n+i} \geqslant 0,$$
称 x_{n+i}为松弛变量。

约束条件(2.1.2)，(2.1.3)所确定的定义域是高维空间中的凸多面体。一个多面体的最基本的概念是顶点和棱，顶点称为多面体的零维边界面，棱称为一维边界面。下面所定义的基本允许解和极方向是顶点和棱的代数描述。引进单纯形表是为了使计算过程表格化。

对线性规划问题，求 $\max\left\{x_0 \mid x_0 = Cx,\ Ax = b,\ x \geqslant 0\right\}$。

设系数矩阵 A 的秩等于行数 m，从 A 中任意地取出 m 列 $P_{j_1}, P_{j_2}, \cdots, P_{j_m}$，构成 A 的一个 $m \times m$ 的子矩阵$B = (P_{j_1} P_{j_2} \cdots P_{j_m})$，若 B 非奇异(即$|B| \neq 0$)，则称 B 为线性规划问题的一个基。变量 $x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_m}$ 称为B 的基变量，其余的变量称为 B 的非基变量，对基 $B = \{P_{j_1} P_{j_2} \cdots P_{j_m}\}$，让所有的非基变量都取零值后，约束条件化为
$$x_{j_1} P_{j_1} + x_{j_2} P_{j_2} + \cdots + x_{j_m} P_{j_m} = b,$$
若记向量
$$x_B = \begin{pmatrix} x_{j_1} \\ \vdots \\ x_{j_m} \end{pmatrix},$$
则上式可写成
$$Bx_B = b.$$
利用高斯消去法，可解得
$$x_B = B^{-1} b,$$
记向量
$$B^{-1} b = \begin{pmatrix} b_{10} \\ \vdots \\ b_{m0} \end{pmatrix}$$

称方程组(2.1.2)的解

$$x_{j_1}=b_{10},\cdots,x_{j_m}=b_{m0},\ \text{其余}\ x_j=0 \tag{2.1.4}$$

为对应于 $\boldsymbol{B}$ 的基本解;若满足 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\geqslant\boldsymbol{0}$,则称其为基本允许解,而这时的 $\boldsymbol{B}$ 称为允许基。

对应于基 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{P}_{j_1}\cdots\boldsymbol{P}_{j_m})$,考虑线性方程组

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}a_{ij_1}\pi_i &= c_{j_1},\\ &\vdots\\ \sum_{i=1}^{n}a_{ij_m}\pi_i &= c_{j_m},\end{aligned} \tag{2.1.5}$$

定义向量

$$\boldsymbol{C}_B=(c_{j_1},\cdots,c_{j_m}),\ \boldsymbol{\pi}=(\pi_1,\cdots,\pi_m),$$

则(2.1.5)可写为

$$\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}_{j_1}=c_{j_1},\cdots,\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}_{j_m}=c_{j_m},$$

或者

$$\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}_B.$$

利用高斯消去法,可解得

$$\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}.$$

称 $\boldsymbol{\pi}$ 为对应于基 $\boldsymbol{B}$ 的单纯形乘子。用 $\boldsymbol{\pi}$ 乘方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的两边,可得

$$\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{b}. \tag{2.1.6}$$

从 $x_0=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$ 的两边减式(2.1.6)的两边,可得

$$x_0-\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

即

$$x_0+(\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{b}, \tag{2.1.7}$$

将基本解(2.1.4)代入(2.1.7),可求得目标函数值

$$x_0=x_0+(\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}_{j_1}-c_{j_1})b_{10}+\cdots+(\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}_{j_m}-c_{j_m})b_{m0}=\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{b}.$$

定理 2.1 对基 $\boldsymbol{B}$,若 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\geqslant\boldsymbol{0}$,且 $\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C}\geqslant\boldsymbol{0}$,则对应于 $\boldsymbol{B}$ 的基本解(2.1.4)便是最优解。我们称其为基本最优解,而这时的基 $\boldsymbol{B}$ 称为最优基。

证明:由 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\geqslant\boldsymbol{0}$,可知(2.1.4)是基本允许解;由$(\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C})\geqslant\boldsymbol{0}$,则对一切允许解 $\boldsymbol{x}$,由关系$(\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$,根据关系式(2.1.7),可知任何允许解的目标函数值 $x_0\leqslant\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{b}$,但是允许解(2.1.4)使目标函数值达到 $\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{b}$,因此必是最优解。证毕。

用 $\boldsymbol{B}^{-1}$乘方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 两边,得

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b},$$

与方程(2.1.7)联在一起,可得关系式

$$\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C}\\ 0 & \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ \boldsymbol{x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\end{pmatrix}. \tag{2.1.8}$$

我们称线性方程组(2.1.8)中的矩阵

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} & \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} & \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\end{pmatrix} \tag{2.1.9}$$

为对应于基 $\boldsymbol{B}$ 的单纯形表,记作 $T(\boldsymbol{B})$。记

$$\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = b_{00}, \tag{2.1.10}$$

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_{10} \\ \vdots \\ b_{m0} \end{pmatrix}, \tag{2.1.11}$$

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix},\ j = 1, 2, \cdots, n, \tag{2.1.12}$$

$$\boldsymbol{\pi P}_j - c_j = \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_j - c_j = b_{0j},\ j = 1, 2, \cdots, n, \tag{2.1.13}$$

则

$$T(\boldsymbol{B}) = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} & \cdots & b_{0n} \\ b_{10} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m0} & b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

对任意的基 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{P}_{j1}\boldsymbol{P}_{j2}\cdots\boldsymbol{P}_{jm})$,设 $T(\boldsymbol{B}) = (b_{ij})$,对应于每一非基变量 x_j,考虑包含 $m+1$ 个变量的线性齐次方程组

$$y_{j_1}\boldsymbol{P}_{j_1} + \cdots + y_{j_m}\boldsymbol{P}_{j_m} + y_j\boldsymbol{P}_j = 0.$$

它的解集是一条直线。记其中使 $y_j = 1$ 的解为

$$\boldsymbol{y}^j = \begin{pmatrix} y_1^j \\ \vdots \\ y_n^j \end{pmatrix}. \tag{2.1.14}$$

记

$$\boldsymbol{y}_B^j = \begin{pmatrix} y_{j_1}^j \\ \vdots \\ y_{j_m}^j \end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{y}_B^j$ 满足 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_B^j + \boldsymbol{P}_j = 0$,

即 $\boldsymbol{y}_B^j = -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_j$.

因此,$\boldsymbol{y}^j$ 满足关系

$$\begin{aligned} & y_{j_i}^j = -b_{ij},\ i = 1, 2, \cdots, m, \\ & y_j^j = 1, \\ & y_k^j = 0,\ \text{对其余所有分量}, \end{aligned} \tag{2.1.15}$$

称 $\boldsymbol{y}^j$ 为基 $\boldsymbol{B}$ 的一个对应于非基变量 x_j 的极方向。根据定义,有性质

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}^j = \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_B^j + \boldsymbol{P}_j = 0, \tag{2.1.16}$$

由于

$$\begin{aligned} b_{0j} &= \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_j - \boldsymbol{C}_j = \sum_{i=1}^{m} c_{j_i}b_{ij} - c_j \\ &= \sum_{i=1}^{m} c_{j_i}(-y_{j_i}^j) + (-y_j^j)c_j \end{aligned}$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} c_k y_k^j,$$

因此有性质

$$Cy^j = -b_{0j}, \tag{2.1.17}$$

定理 2.2 对任意的单纯形表(b_{ij}),若有某 j,使得

$$b_{0j}<0,\ b_{ij}\leqslant 0,\ i=1,2,\cdots,m.$$

则对应的线性规划问题或者无允许解,或者 x_0 无上界,因此无最优解。

证明:由定理的假设及极方向 y^j 的定义(2.1.15),可知 $y^j\geqslant 0$,由(2.1.17)可知 $Cy^j>0$。现在,若问题有允许解 x,则对任何实数 $\lambda>0$,有关系 $A(x+\lambda y^j)=Ax+\lambda Ay^j=Ax=b$, $x+\lambda y^j\geqslant 0$。因此,$x+\lambda y^j$ 也是允许解,且当 $\lambda\to+\infty$时,有

$$C(x+\lambda y^j)\to+\infty.$$

证毕。

一个极方向 y^j,若使 $y^j\geqslant 0$,则称其为一个极射向。

对基 $B=(P_{j_1}P_{j_2}\cdots P_{j_m})$,设其单纯形表 $T(B)=(b_{ij})$,考虑其中的某一非零元素 b_{rs}, $r,s\geqslant 1$, $j_r\neq s$(即 x_s 不是第 r 个基变量)。将矩阵(b_{ij})作如下的行初等变换

$$\bar{b}_{rj}=\frac{b_{rj}}{b_{rs}},\ j=0,1,\cdots,n, \tag{2.1.18}$$

$$\bar{b}_{ij}=b_{ij}-\frac{b_{rj}}{b_{rs}}b_{is},\ i\neq r, j=0,1,\cdots,n, \tag{2.1.19}$$

可得矩阵$(\bar{b}_{ij})$。从对应于单纯形表(b_{ij})的方程组

$$x_0+\sum_{j=1}^{n} b_{0j}x_j = b_{00},$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j = b_{i0},\ i = 1,2,\cdots,m.$$

看,上述变换相当于从第 r 个方程中解出变量 x_s(这时 x_j 变为非基变量),然后将其代入其他各个方程。也就是说,用 x_s 代替基变量 x_{jr}。因此,可得以下定理。

定理 2.3 经上述初等变换后所得的矩阵$(\bar{b}_{ij})$是基

$$\bar{B}=(P_{j_1}\cdots P_{j_{r-1}}P_sP_{j_{r+1}}\cdots P_{j_m})$$

的单纯形表。令

$$E_{rs}=\begin{bmatrix}1 & & & -\frac{b_{0s}}{b_{rs}} & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & -\frac{b_{r-1s}}{b_{rs}} & & & \\ & & & \frac{1}{b_{rs}} & & & \\ & & & -\frac{b_{r+1s}}{b_{rs}} & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & -\frac{b_{ms}}{b_{rs}} & & & 1\end{bmatrix} \tag{2.1.20}$$

则

$$(\bar{b}_{ij}) = E_{rs} \cdot (b_{ij}). \tag{2.1.21}$$

称变换(2.1.18),(2.1.19)为(r,s)旋转变换。称b_{rs}为旋转元,s为旋转列,r为旋转行,旋转列所对应的非基变量称为旋入变量,旋转行所对应的基变量称为旋出变量。

2.2 单纯形方法

假设已知一允许基$B=(P_{j_1}P_{j_2}\cdots P_{j_m})$,设$T(B)=(b_{ij})$。以后再介绍初始允许基的求法。由于$B$是允许基,所以$b_{i0}\geqslant 0(i=1,2,\cdots,m)$。

单纯形计算程序:

(1) 若$b_{0j}\geqslant 0,(j=1,2,\cdots,n)$,则步骤终止。根据定理2.1,已获得基本最优解:

$x_{j_i}=b_{i0}, i=1,2,\cdots,m$; $x_j=0$(其余分量)。

相反,设

$$s=\min\{j \mid b_{0j}<0, j\geqslant 1\}.$$

(2) 若$b_{is}\leqslant 0(i=1,2,\cdots,m)$,则步骤终止。根据定理2.2,已知问题无最优解。相反,求

$$\theta = \min\left\{\frac{b_{i0}}{b_{is}} \middle| b_{is} > 0,\ 1 \leqslant i \leqslant m\right\} = \frac{b_{r0}}{b_{rs}}$$

假设达到最小的比值不惟一,则取其中所对应的基变量指标最小的行作为r。即取指标r满足

$$j_r=\min\left\{j_i \middle| \frac{b_{i0}}{b_{is}}=\theta,\ b_{is}>0\right\}$$

(这个选取指标r及s的规则,通常称做小指标规则)。

(3) 作(r,s)旋转变换,得基$\bar{B}$及$T(\bar{B})=(\bar{b}_{ij})$,其中

$$\bar{B}=(P_{j1}\cdots P_{jr-1}P_sP_{jr+1}\cdots P_{jm})$$

$$\bar{b}_{rj}=\frac{b_{rj}}{b_{rs}}, j=0,1,\cdots,n$$

$$\bar{b}_{ij}=b_{ij}-\frac{b_{rj}}{b_{rs}}b_{is},\ 0\leqslant i\neq r\leqslant m,\ 0\leqslant j\leqslant n$$

用$(\bar{b}_{ij})$代替(b_{ij}),转到步骤(1)。

定理 2.4 步骤(3)中所得的基$\bar{B}$仍为一允许基。

证明: 由$b_{rs}>0, b_{r0}\geqslant 0$,可知$\bar{b}_{r0}=\frac{b_{r0}}{b_{rs}}\geqslant 0$。对$i\neq j$,若$b_{is}\leqslant 0$,则

$$\bar{b}_{i0}=b_{i0}-\frac{b_{r0}}{b_{rs}}b_{is}\geqslant b_{i0}\geqslant 0.$$

若$b_{is}>0$,则步骤(2)中θ及j_r的取法,可知

$$\bar{b}_{i0}=b_{is}\left(\frac{b_{i0}}{b_{is}}-\frac{b_{r0}}{b_{rs}}\right)=b_{is}\left(\frac{b_{i0}}{b_{is}}-\theta\right)\geqslant 0.$$

证毕。

定理 2.5 步骤(3)中所得的$(\bar{b}_{ij})$使得

$$\bar{b}_{00} \geqslant b_{00},$$

当且仅当 $b_{r0}=0$ 时，$\bar{b}_{00}=b_{00}$。

证明：因为 $b_{rs}>0$，$b_{r0}\geqslant 0$，$b_{0s}<0$，所以

$$\bar{b}_{00}-b_{00}=\left(-\frac{b_{0s}}{b_{rs}}\right)b_{r0}\geqslant 0,$$

当且仅当 $b_{r0}=0$ 时，$\bar{b}_{00}-b_{00}=0$。证毕。

定理 2.6 上述计算程序必在有限步内终止。

证明：根据定理 2.4，可知计算过程是由允许基到允许基的逐步迭代。因此，只要能证明计算过程中，基不重复出现，那么，由于基的总数是有限的，程序也就必须在有限步内终止于步骤(1)或(2)。下面用反证法。假设对某个线性规划问题，运用上述算法时，产生了死循环：

$$T(\boldsymbol{B}_1)\to T(\boldsymbol{B}_2)\to\cdots\to T(\boldsymbol{B}_k)\to T(\boldsymbol{B}_1).$$

将变量的指标$\{1,2,\cdots,n\}$划分为互不相交的子集 I,J,H 之和，使得

$j\in I$，当且仅当 x_j 是所有 $\boldsymbol{B}_t$ 的基变量。I 称固定基变量指标集。

$j\in H$，当且仅当 x_j 是所有 $\boldsymbol{B}_t$ 的非基变量。H 称固定非基变量指标集。

$j\in J$，当且仅当 x_j 既是某 $\boldsymbol{B}_t$ 的基变量，也是某 $\boldsymbol{B}_u$ 的非基变量。J 称循环变量指标集。

将行指标$\{1,2,\cdots,m\}$划分为互不相交的子集 L,M 之和，使得对任何的基 $\boldsymbol{B}_t$，满足

$i\in L$，当且仅当第 i 个基变量的指标 $j_i\in I$。L 称非旋转行指标集。

$i\in M$，当且仅当第 i 个基变量的指标 $j_i\in J$。M 称旋转行指标集。

设 $T(\boldsymbol{B}_t)=(b_{ij}^t)$，$t=1,2,\cdots,k$，设由 $T(\boldsymbol{B}_t)$变换到 $T(\boldsymbol{B}_{t+1})$的旋转行为 $r(t)$，旋出基变量的指标为 r_t，旋入的非基变量指标为 s_t（当然，此时的旋转列也为 s_t），其中 $t=1,2,\cdots,k$，而 $\boldsymbol{B}_{k+1}=\boldsymbol{B}_1$。根据上述定义，立即可得

$$J=\bigcup_{t=1}^{k}\{s_t\}=\bigcup_{t=1}^{k}\{r_t\},$$

$$M=\bigcup_{t=1}^{k}\{r(t)\}.$$

根据定理 2.5 的前一部分，可得

$$b_{00}^1\leqslant b_{00}^2\leqslant\cdots\leqslant b_{00}^k\leqslant b_{00}^1,$$

因此有

$$b_{00}^1=b_{00}^2=\cdots=b_{00}^k.$$

根据定理 2.5 的后一部分，可得

$$b_{r(t)0}^t=0,\ t=1,2,\cdots,k,$$

根据旋转变换关系式

$$\bar{b}_{i0}=b_{i0}-\frac{b_{r0}b_{is}}{b_{rs}},(i\neq r);\quad \bar{b}_{r0}=\frac{b_{r0}}{b_{rs}},$$

立即可得

$$b_{i0}^1=b_{i0}^2=\cdots=b_{i0}^k,\ i=0,1,\cdots,m,$$

因此有

$$b_{r(t)0}^v=0,\ t=1,2,\cdots,k,\ v=1,2,\cdots,k,$$

即

$$b_{i0}^f=0, i\in M, i=1,2,\cdots,k.$$

定义
$$q=\max\{j\mid j\in J\}.$$

设 $s_f=r=q$，对 $T(\boldsymbol{B}_f)=(b_{ij}^f)$，根据步骤(1)中旋转列的选取规则，可知

$$b_{0q}^f<0, b_{0j}^f\geqslant 0, j\in J\setminus\{q\},$$

令向量

$$\boldsymbol{Z}=(z_1,z_2,\cdots,z_n),$$

其中 $z_j=b_{0j}^f, j=1,2,\cdots,n$。根据 b_{0j}的定义(2.1.13)，有关系

$$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{C}_{B_f}\boldsymbol{B}_f^{-1}\mathbf{A}-\boldsymbol{C}. \tag{2.2.1}$$

对 $T(\boldsymbol{B}_e)=(b_{ij}^e)$，设基 $\boldsymbol{B}_e=(\boldsymbol{P}_{j_1},\boldsymbol{P}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{P}_{j_m})$。仍记 $s_e=s, r(e)=r$，则 $j_r=q$。因为对所有的 $i\in M$ 有 $b_{i0}^e=0$(根据关系(2.1.21))，由步骤(2)中旋转行的选取规则，可知

$$b_{0s}^e<0,\ b_{rs}^e>0,\ b_{is}^e\leqslant 0,\ i\in M\setminus\{r\}.$$

这是因为

$$i\in M\Leftrightarrow j_i\in J,$$
$$j_r=q=\max\{j\mid j\in J\},$$

故若有某 $i\in M\setminus\{r\}$，使 $b_{is}^e>0$，则因为

$$\frac{b_{i0}^e}{b_{is}^e}=0,\ j_i<q,$$

就应该选取 i 为旋转行而不取 r。

对单纯形表 $T(\boldsymbol{B}_e)$，设对应于 x_s 的极方向为 $\boldsymbol{y}$，则根据性质(2.1.16)，(2.1.17)，有关系式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=0,\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}=-b_{0s}^e>0, \tag{2.2.2}$$

由(2.2.1)和(2.2.2)可得关系式

$$\boldsymbol{Z}\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{C}_{B_f}\boldsymbol{B}_f^{-1}\mathbf{A})\boldsymbol{y}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}=b_{0s}^e<0. \tag{2.2.3}$$

另一方面，由 $\boldsymbol{Z}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的定义可知

$$z_j=b_{0j}^f=0,\ j\in I,$$
$$y_j=0,\ j\in H,$$
$$z_j\geqslant 0,\ j\in J\setminus\{q\},$$
$$y_j\geqslant 0,\ j\in J\setminus\{q\}。$$

因此可得关系式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{y} &= \sum_{j=1}^{n} z_j y_j = \sum_{j\in J} z_j y_j \\ &= \sum_{j\in J\setminus\{q\}} z_j y_j - b_{0q}^f b_{rs}^e \geqslant -b_{0q}^f b_{rs}^e > 0,\end{aligned}$$

这就与关系式(2.2.3)互相矛盾。证毕。

【例 2.1】求 $\max\ x_0=x_1-x_2$，

满足

$$-x_1+x_2\leqslant 1,$$

$$x_2 \leqslant 2,$$
$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$$

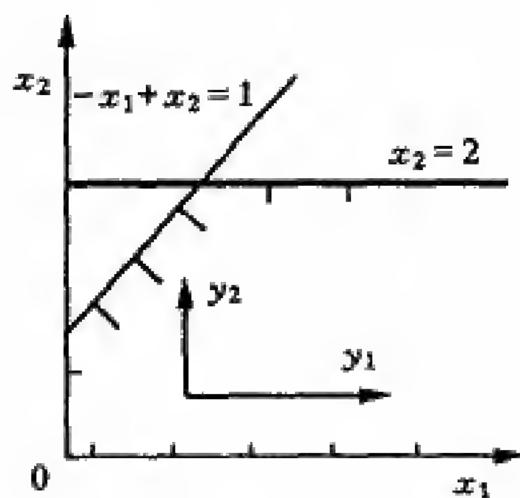


图 2.1

定义域如图 2.1 所示。

化成标准形式为：

求 $\max x_0 = x_1 - x_2,$

满足

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ x_2 + x_4 = 2,$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geqslant 0.$$

基 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{P}_3\ \boldsymbol{P}_4)$的单纯形表为

$$\begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

对应于 $\boldsymbol{B}$ 的基本解为

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = 2,$$

对应于非基变量 x_1 的极方向 $\boldsymbol{y}^1$ 为

$$\boldsymbol{y}^1 = (1,0,1,0)^{\mathrm{T}} \geqslant 0,\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}^1 = 1 > 0.$$

对应于 x_2 的极方向 $\boldsymbol{y}^2$ 为

$$\boldsymbol{y}^2 = (0,1,-1,-1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}^2 = -1 < 0.$$

$\boldsymbol{y}^1$ 为极射向。根据定理 1.2,问题无最大值。

【例 2.2】 求 $\max x_0 = 2x_1 + x_2,$

满足

$$x_1 + x_2 \leqslant 5,$$
$$x_1 \geqslant x_2,$$
$$6x_1 + 2x_2 \leqslant 21,$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0.$$

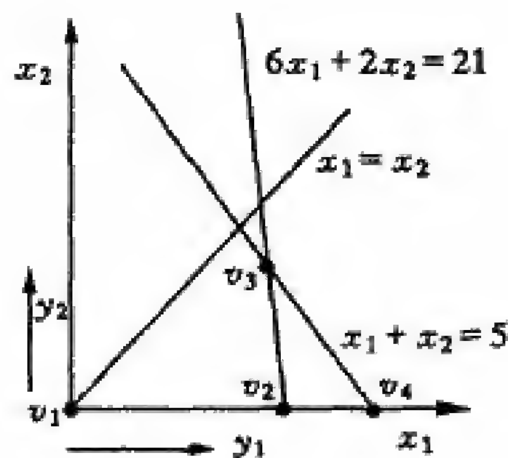


图 2.2

定义域如图 2.2 所示。

化成标准形式为：

求 $\max x_0 = 2x_1 + x_2,$

满足

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5,$$
$$-x_1 + x_2 + x_4 = 0,$$
$$6x_1 + 2x_2 + x_5 = 21,$$
$$x_1, \cdots, x_5 \geqslant 0.$$

基 $\boldsymbol{B}_1 = (\boldsymbol{P}_3\ \boldsymbol{P}_4\ \boldsymbol{P}_5)$所对应的单纯形表为

$$T(\boldsymbol{B}_1)=\begin{pmatrix}0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 21 & 6 & 2 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

对应于 $\boldsymbol{B}_1$ 的基本解为

$$x_0=0,\ x_1=x_2=0,\ x_3=5,\ x_4=0,\ x_5=21.$$

在 $T(\boldsymbol{B}_1)$中，两个极方向 $\boldsymbol{y}^1$ 和 $\boldsymbol{y}^2$ 为

$$\boldsymbol{y}^1=(1,0,-1,1,-6)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{y}^2=(0,1,-1,-1,-2)^{\mathrm{T}}.$$

在 $T(\boldsymbol{B}_1)$中，若以 b_{11}为旋转元进行旋转变换，则可得基 $\boldsymbol{B}_2=(\boldsymbol{P}_1\ \boldsymbol{P}_4\ \boldsymbol{P}_5)$的单纯形表$T(\boldsymbol{B}_2)$，

$$T(\boldsymbol{B}_2)=\begin{pmatrix}10 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0\\ 5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 5 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0\\ -9 & 0 & -4 & -6 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

对应于 $\boldsymbol{B}_2$ 的基本解为

$$x_0=10,x_1=5,x_2=0,x_3=0,x_4=5,x_5=-9.$$

$\boldsymbol{B}_1$ 是允许基，对应的基本解为图中 v_1 点。$\boldsymbol{B}_2$ 不是允许基，对应的基本解为图中 v_4 点，旋转变换(1,1)，使基本解 v_1 沿着极方向 $\boldsymbol{y}^1$ 走到了基本解 v_4，走得太远了，已超越定义域边界。假如作(3,1)旋转变换，则可得对应于基 $\boldsymbol{B}_3=(\boldsymbol{P}_3\ \boldsymbol{P}_4\ \boldsymbol{P}_1)$的单纯形表 $T(\boldsymbol{B}_3)$，

$$T(\boldsymbol{B}_3)=\begin{bmatrix}7 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3}\\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{2}{3} & 1 & 0 & -\frac{1}{6}\\ \frac{7}{2} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 1 & \frac{1}{6}\\ \frac{7}{2} & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{6}\end{bmatrix}.$$

对应于 $\boldsymbol{B}_3$ 的基本解为允许解：

$$x_0=7,x_1=\frac{7}{2},x_2=0,x_3=\frac{3}{2},x_4=\frac{7}{2},x_5=0.$$

旋转变换(3,1)，使基本解 v_1 沿着极方向 $\boldsymbol{y}^1$ 走到了基本解 v_2。

下面从允许基 $\boldsymbol{B}_3$ 开始，进行单纯形程序。

(1) 因为 $b_{02}=-\frac{1}{3}<0$，故 $s=2$。

(2) 因为 $\theta=\min\left\{\frac{3}{2}\Big/\frac{2}{3},\frac{7}{2}\Big/\frac{4}{3},\ \frac{7}{2}\Big/\frac{1}{3}\right\}=\frac{9}{4},j_r=3$，故 $r=1$。

(3) 作(1,2)旋转变换后，得 $T(\boldsymbol{B}_4)$，

$$T(B_4)=\begin{bmatrix} \frac{31}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{9}{4} & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -2 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{11}{4} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{B}_4=(\boldsymbol{P}_2\ \boldsymbol{P}_4\ \boldsymbol{P}_1)$,对应于 $\boldsymbol{B}_4$ 的基本解是图中的点 v_3。

因为所有的 $b_{0j}\geqslant 0$,故 $\boldsymbol{B}_4$ 是最优基,基本最优解为

$$x_1=\frac{11}{4},\ x_2=\frac{9}{4},\ x_3=0,\ x_4=\frac{1}{2},\ x_5=0.$$

下面介绍第一个基本允许解的求法。对线性规划问题(2.1.1)~(2.1.3),不妨设 $b_i\geqslant 0$,$i=1,2,\cdots,m$。当 $b_i<0$ 时,只要方程两边乘 -1 即可。考虑下述辅助问题。

求
$$\max x_0=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j, \tag{2.2.4}$$

满足
$$\begin{aligned} y_1+\sum_{j=1}^{n}a_{1j}x_j&=b_1,\\ \vdots \qquad \vdots \qquad &\ \ \vdots\\ y_m+\sum_{j=1}^{n}a_{mj}x_j&=b_m,\\ y_1,\cdots,y_m,x_1,\cdots,x_n&\geqslant 0. \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

对辅助问题,显然有一个现存的基本允许解:

$$y_i=b_i\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,m,$$
$$x_j=0,j=1,2,\cdots,n.$$

对应的单纯形表为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\sum_{i=1}^{n}a_{i1} & \cdots & -\sum_{i=1}^{m}a_{in} \\ b_1 & 1 & & & a_{11} & & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ b_m & & & 1 & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称这个基为人造基。从人造基开始,应用单纯形程序,必可求得问题(2.2.4)~(2.2.6)的最优基(因为目标函数值有上界)。设求得的基为 $\boldsymbol{B}$,$T(\boldsymbol{B})=(b_{ij})$,$i=0,1,\cdots,m$;$j=0,1,\cdots,m+n$。

(i)若 $\max x_0=b_{00}<\sum_{i=1}^{m}b_i$,则规划(2.1.1)~(2.1.3)无允许解。

(ii)若 $\max x_0=b_{00}=\sum_{i=1}^{m}b_i$,则显然所求得的辅助问题最优解满足条件

$$y_i=0,\ i=1,2,\cdots,m$$

这时有两种可能性:

(1) $\boldsymbol{B}$ 的基变量全为 $\boldsymbol{x}$ 变量，则 $\boldsymbol{B}$ 已是(2.1.1)～(2.1.3)的一个允许基，此时，只要在表 (b_{ij}) 中去掉附加的 $1,2,\cdots,m$ 列(即对应于 y_i 的列)，同时用($\boldsymbol{C_B B^{-1} b}$, $\boldsymbol{C_B B^{-1} A - C}$)代替行 $(b_{00},b_{01},\cdots,b_{0n})$ 后，即得初始允许单纯形表。

(2) 若 $\boldsymbol{B}$ 的基变量中含有 $\boldsymbol{y}$ 变量。也就是说，(b_{ij}) 中含有某 r 行，对应的方程为如下形式

$$y_r + \sum_{k\in I} b_{rk} y_k + \sum_{j\in J} b_{rj} x_j = 0 ,$$

其中 y_r 为基变量，$y_k(k\in I)$，$x_j(j\in J)$ 为非基变量。若这是所有的 $b_{rj}=0$，即为

$$y_r + \sum_{k\in I} b_{rk} y_k = 0$$

则方程组(2.1.2)线性相关，其中的第 r 个方程可以去掉。若至少有某个 $b_{rs}\neq 0,(s\in J)$，则进行 (r,s) 旋转变换，可得基 $\bar{\boldsymbol{B}}$ 及表 $(\bar{b}_{ij})$，而其中 $\bar{b}_{i0}=b_{i0}\geqslant 0,\ i=0,1,\cdots,m$，$\bar{\boldsymbol{B}}$ 中减少了一个 $\boldsymbol{y}$ 基变量。有限步后必可化为情形(1)。

根据单纯形算法，直接可得如下的结论：

定理 2.7 线性规划问题(2.1.1)～(2.1.3)，若有允许解，则必有基本允许解。

定理 2.8 线性规划问题(2.1.1)～(2.1.3)，若有最优解，则必有基本最优解。

2.3 改进单纯形方法

单纯形算法所需要的只是下面一些数据：

(ⅰ) $b_{0j}=\boldsymbol{C_B B^{-1} P_j}-C_j,\ j=0,1,\cdots,n$；

(ⅱ) 旋转列 $s=\min\{j\mid b_{0j}<0,\ j\geqslant 1\}$；

(ⅲ) $(b_{1s},\cdots,b_{ms})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B^{-1}P_s}$，$(b_{10},\cdots,b_{m0})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{x_B}=\boldsymbol{B^{-1}b}$；

(ⅳ) $\theta=\min\left\{\dfrac{b_{i0}}{b_{is}}\middle| b_{is}>0,\ 1\leqslant i\leqslant m\right\}=\dfrac{b_{r0}}{b_{rs}}$.

经 (r,s) 旋转变换后就可得到新的基 $\bar{\boldsymbol{B}}$。从计算公式中可以看出，这些数据只要知道 $\boldsymbol{B}^{-1}$，就可直接从问题的初始数据 $\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\boldsymbol{C}\}$ 计算出来。当基 $\boldsymbol{B}$ 旋转变换到 $\bar{\boldsymbol{B}}$ 时，$\bar{\boldsymbol{B}}^{-1}$ 很容易从 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 修正得到。

定理 2.9 $\bar{\boldsymbol{B}}^{-1}=\boldsymbol{E_{rs}B^{-1}}$.

证明：因为 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{P}_{j_1}\cdots\boldsymbol{P}_{j_{r-1}}\boldsymbol{P}_{j_r}\boldsymbol{P}_{j_{r+1}}\cdots\boldsymbol{P}_{j_m})$，$\bar{\boldsymbol{B}}=(\boldsymbol{P}_{j_1}\cdots\boldsymbol{P}_{j_{r-1}}\boldsymbol{P}_s\boldsymbol{P}_{j_{r+1}}\cdots\boldsymbol{P}_{j_m})$，则容易证明，$\boldsymbol{B}^{-1}\bar{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{B}_{rs}$，其中

$$\boldsymbol{B}_{rs}=\begin{bmatrix} 1 & & & b_{1s} & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & b_{r-1s} & & & \\ & & & b_{rs} & & & \\ & & & b_{r+1s} & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & b_{ms} & & & 1 \end{bmatrix}.$$

通过直接验算，可知 $\boldsymbol{B}_{rs}^{-1}=\boldsymbol{E}_{rs}$，其中

$$E_{rs}=\begin{bmatrix}1 & & & -\frac{b_{1s}}{b_{rs}} & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & -\frac{b_{r-1s}}{b_{rs}} & & & \\ & & & \frac{1}{b_{rs}} & & & \\ & & & -\frac{b_{r+1s}}{b_{rs}} & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & -\frac{b_{ms}}{b_{rs}} & & & 1\end{bmatrix},$$

因此可得

$$\bar{B}^{-1}B=(B^{-1}\bar{B})^{-1}=B_{rs}^{-1}=E_{rs}$$
$$\bar{B}^{-1}=E_{rs}B^{-1}$$

证毕。

改进单纯形程序：

设已给初始允许基 $B=(P_{j_1},\cdots,P_{j_m})$，记

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1m}\\ & & \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm}\end{pmatrix},\quad x_B=B^{-1}b=\begin{pmatrix}b_{10}\\ \vdots\\ b_{m0}\end{pmatrix}$$

(1) 计算单纯形乘子 $\pi=C_BB^{-1}$；

(2) 计算 $b_{0j}=\pi P_j-C_j,\ j=1,2,\cdots,n$.（通常称 b_{0j} 为检验数。）若所有的 $b_{0j}\geqslant 0,j=1,\cdots,n$ 则步骤终止，已获得最优基。相反，设

$$b_{0s}=\pi P_s-C_s<0,\ s\geqslant 1,$$
$$b_{0j}=\pi P_j-C_j\geqslant 0,\ 1\leqslant j<s;$$

(3) 计算向量 $B^{-1}P_s=(b_{1s},\cdots,b_{ms})^{\mathrm{T}}$；若所有的 $b_{is}\leqslant 0,(1\leqslant i\leqslant m)$，则步骤终止。问题无最优解。相反，求

$$\theta=\min\left\{\frac{b_{i0}}{b_{is}}\middle|b_{is}>0,\ 1\leqslant i\leqslant m\right\},$$
$$j_r=\min\{j_i\mid b_{is}=\theta,\ b_{is}>0\};$$

(4) 形成初等变换矩阵 E_{rs}；

(5) 置 $\bar{B}=(P_{j_1}\cdots P_{j_{r-1}}P_sP_{j_{r+1}}\cdots P_{j_m})$，

$\bar{B}^{-1}=E_{rs}B^{-1}$，

$x_{\bar{B}}=E_{rs}x_B$，

然后转到步骤(1)。

一个基 B，即使本身是很稀疏(即 B 中非零元素所占的比率很小)，B^{-1} 也可能变得很稠密，例如

$$B=\begin{bmatrix}1&&&&1\\1&1&&&\\&1&1&&\\&&1&1&\\&&&1&1\end{bmatrix},\quad B^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

但是，B 可以分解为 LU，因而 $B^{-1}=U^{-1}L^{-1}$，其中 L，L^{-1}都是下三角矩阵，U，U^{-1}都是上三角矩阵。进一步，U^{-1}和 L^{-1}又可以分别表示成初等变换矩阵的乘积。因而 B^{-1}有如下形式的 U，L 分解表示式

$$B^{-1}=U_1^{-1}U_2^{-1}\cdots U_p^{-1}L_q^{-1}L_{q-1}^{-1}\cdots L_1^{-1},$$

其中 U_i^{-1} 都是上三角矩阵，L_i^{-1} 都是下三角矩阵。譬如对上述数字例子而言，B^{-1}可表示成如下形式

$$B^{-1}=U_5^{-1}L_4^{-1}L_3^{-1}L_2^{-1}L_1^{-1},$$

其中

$$U_5^{-1}=\begin{bmatrix}1&&&&-\frac{1}{2}\\&1&&&\frac{1}{2}\\&&1&&-\frac{1}{2}\\&&&1&\frac{1}{2}\\&&&&\frac{1}{2}\end{bmatrix},\quad L_4^{-1}=\begin{bmatrix}1&&&&\\&1&&&\\&&1&&\\&&&1&\\&&&-1&1\end{bmatrix},$$

$$L_3^{-1}=\begin{bmatrix}1&&&&\\&1&&&\\&&1&&\\&&-1&1&\\&&&&1\end{bmatrix},\quad L_2^{-1}=\begin{bmatrix}1&&&&\\&1&&&\\&-1&1&&\\&&&1&\\&&&&1\end{bmatrix},\quad L_1^{-1}=\begin{bmatrix}1&&&&\\-1&1&&&\\&&1&&\\&&&1&\\&&&&1\end{bmatrix}$$

在每个初等变换矩阵中，只有一列不是单位向量。因此，实际上只要记录着一列就够了。例如就上述例子而言，记录了矩阵 E：

$$U_5^{-1}L_4^{-1}L_3^{-1}L_2^{-1}L_1^{-1}$$

$$E=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & & & & & 1 \\ \frac{1}{2} & & & & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & & & 1 & -1 & \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 & & & \\ \frac{1}{2} & -1 & & & & \end{bmatrix}$$

就相当于记录了各初等变换矩阵，从而也就记录了 B^{-1}。但是，矩阵 E 往往要比 B^{-1} 稀疏得多。为了减少计算过程中的数据存储量，也为了充分利用系数矩阵 A 的稀疏性，往往把 B^{-1} 表示成上述的初等变换矩阵乘积的形式。

在改进单纯形算法中，假设已有一个允许基 B，并且 B^{-1} 已表示成初等变换矩阵的乘积：

$$B^{-1}=E_kE_{k-1}\cdots E_1,$$

则有关系：

$$\pi=C_BE_kE_{k-1}\cdots E_1,$$
$$\bar{P}_s=B^{-1}P_s=E_kE_{k-1}\cdots E_1P_s,$$
$$\bar{P}_0=B^{-1}b=E_kE_{k-1}\cdots E_1b.$$

设经 (r,s) 旋转变换后得基 $\bar{B}$，则

$$\bar{B}^{-1}=E_{rs}B^{-1}=E_{rs}E_kE_{k-1}\cdots E_1=E_{k+1}\cdots E_1.$$

为了减少计算过程中得累积误差，当 k 增加到一定程度时，可周期地对 $\bar{B}^{-1}$ 重新求它的 U,L 分解式。

2.4 允许解的一般表达式

设 $x^1,\cdots,x^u$ 是线性规划问题(2.1.1)～(2.1.3)的所有基本允许解。设 $y^0,\cdots,y^v$ 是它的所有的极射向。这里，把零向量也看做是极射向，记作 y^0。因此，假如 $v=0$，实际上表示问题没有极射向，即定义域有界。

定理 2.10 x 是允许解的充分必要条件为：存在非负实数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_u,\mu_0,\cdots,\mu_v$，使得满足

$$x=\sum_{i=1}^{u}\lambda_ix^i+\sum_{j=1}^{v}\mu_iy^j,\ \sum_{i=1}^{u}\lambda_i=1.$$

证明：充分性。由 $Ay^j=0,\ Ax^i=b$，得

$$Ax=\sum_{i=1}^{u}\lambda_iAx^i+\sum_{j=1}^{v}\mu_iAy^j=b\sum_{i=1}^{u}\lambda_i=b.$$

由 $\lambda_i\geqslant0,\mu_j\geqslant0,x^i\geqslant0,y^j\geqslant0$，可知 $x\geqslant0$，因此 x 是允许解。

必要性。对 x 的非零分量个数进行数学归纳。若允许解 x 的非零向量的个数是 1，设为

$$x_{j_1}>0,\ x_j=0,\ 1\leqslant j\neq j_1\leqslant n,$$

则必可找出适当的 $m-1$ 个向量，设为 $P_{j_2}\cdots P_{j_m}$，使 $B=(P_{j_1}\ P_{j_2}\cdots\ P_{j_m})$ 构成一个基（即 $P_{j_1}\cdots$

P_{j_m}线性无关)。而这时,对应于 B 的基本解便是 x。现在假设对非零分量个数小于 r 的一切允许解 x,定理成立,从而证明等于 r 时也成立。不失一般性,设 x 满足

$$x_j>0,\ j=1,2,\cdots,r$$
$$x_j=0,j=r+1,\cdots,n$$

若这时,向量 $P_1\cdots P_r$ 线性无关,则必可找出适当的 $m-r$ 个向量,设为 $P_{r+1},\cdots,P_m$,使得 $B=(P_1\cdots P_rP_{r+1}\cdots P_m)$构成一个基,而对应的基本解为 x。若 $P_1,\cdots,P_r$ 线性相关,不妨设向量 $P_{k+1},\cdots,P_r(k\geqslant1)$是 $P_1,\cdots,P_r$ 中的最大线性无关组。因此,$P_1,\cdots,P_k$ 都可用 $P_{k+1},\cdots,P_r$ 线性表出。设 $P_{r+1},\cdots,P_{k+m}$是适当的 $m+k-r$ 个向量,使得

$$B=(P_{k+1}\cdots P_rP_{r+1}\cdots P_{k+m})$$

构成一个基。记 $T(B)=(b_{ij})$。考虑 $T(B)$中的极方向 $\bar{y}^1=(y_1y_2\cdots y_n)^{\mathrm{T}}$,其中

$$y_1=1,y_2=\cdots=y_k=0,$$
$$y_{k+1}=-b_{i1},i=1,2,\cdots,m,$$
$$y_j=0,\text{对其余的各分量}.$$

由 $A\bar{y}^1=0$,可知

$$P_1=\sum_{i=1}^{m}(-y_{k+1})P_{k+i}\ .$$

但是,P_1 可用 $P_{k+1},\cdots,P_r$ 线性表出,因此必有

$$y_{r+1}=\cdots=y_{k+m}=0.$$

下面分两种情况考虑。

(ⅰ) 若 $y_i\geqslant0,\ i=k+1,\cdots,r$。则 $\bar{y}^1$是一个极射向,不妨设它就是 y^1。作

$$x'=x-\theta y^1,$$
$$\theta=\min\left\{\frac{x_i}{y_i}\middle|y_i>0,\ 1\leqslant i\leqslant r\right\}\frac{x_t}{y_t}.$$

容易证明,x'仍是允许解。但此时,x'的非零分量个数必小于 r(因为 $x_i'=0,i=r+1,\cdots,n$,且 $x_t'=0$)。由归纳假设,x'可表示为

$$x'=\sum_{i=1}^{u}\lambda_i'x^i+\sum_{j=0}^{v}\mu_j'y^j\ ,$$

其中

$$\sum_{i=1}^{u}\lambda_i'=1,\ \lambda_i'\geqslant0,\ \mu_j'\geqslant0.$$

因此可得

$$x=x'+\theta y^1=\sum_{i=1}^{u}\lambda_i'x^i+(\mu_1'+\theta)y^1+\sum_{j=2}^{v}\mu_j'y^j.$$

(ⅱ) 若 y_i 中有正有负。则作

$$x'=x-\theta_1\bar{y}^1,\ x''=x+\theta_2\bar{y}^1$$

其中

$$\theta_1=\min\left\{\frac{x_i}{y_i}\middle|y_i>0\right\}=\frac{x_s}{y_s}>0,$$

$$\theta_2=\min\left\{\frac{x_i}{-y_i}\middle|y_i<0\right\}=\frac{x_t}{-y_t}>0.$$

容易证明，$x'x''$都是允许解，且它们的非零分量个数都小于 r。由归纳假设，$x'x''$可表示为

$$x' = \sum_{i=1}^{u}\lambda'_i x^i + \sum_{j=0}^{v}\mu'_j y^j,$$

$$x'' = \sum_{i=1}^{u}\lambda''_i x^i + \sum_{j=0}^{v}\mu''_j y^j.$$

其中

$$\sum_{i=1}^{u}\lambda'_i = 1,\ \sum_{i=1}^{u}\lambda''_i = 1,\ \lambda'_i,\lambda''_i,\mu'_j,\mu''_j\geqslant 0\ .$$

但是

$$x=\frac{\theta_2}{\theta_1+\theta_2}x'+\frac{\theta_1}{\theta_1+\theta_2}x'',$$

代入后可得

$$x = \sum_{i=1}^{u}\lambda_i x^i + \sum_{j=0}^{v}\mu_j y^j\ ,$$

其中

$$\lambda_i=\frac{\theta_2}{\theta_1+\theta_2}\lambda'_i+\frac{\theta_1}{\theta_1+\theta_2}\lambda''_i,$$

$$\mu_j=\frac{\theta_2}{\theta_1+\theta_2}\mu'_j+\frac{\theta_1}{\theta_1+\theta_2}\mu''_j,$$

且满足

$$\sum_{i=1}^{u}\lambda_i = 1,\ \lambda_i\geqslant 0,\ \mu_j\geqslant 0.$$

证毕。

2.5 对偶理论

从单纯形方法中，已经看出，求解线性规划问题

$$\max\{\boldsymbol{Cx}\mid \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}\} \tag{2.5.1}$$

相当于求一个基 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\geqslant 0$，且对应的乘子 $\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}$满足条件 $\boldsymbol{\pi A}\geqslant\boldsymbol{C}$。现在，考虑问题

$$\min\{\boldsymbol{ub}\mid \boldsymbol{uA}\geqslant\boldsymbol{C}\}, \tag{2.5.2}$$

其中 $\boldsymbol{u}=(u_1\ u_2\cdots\ u_m)$，称问题(2.5.2)为(2.5.1)的对偶规划(或者乘子规划)。称满足条件 $\boldsymbol{uA}\geqslant\boldsymbol{C}$ 的 $\boldsymbol{u}$ 为对偶允许解。使 $\boldsymbol{ub}$ 达到最小值的对偶允许解，称为对偶最优解。

定理 2.11 (2.5.1)和(2.5.2)的任何允许解 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{u}$，必满足关系式 $\boldsymbol{ub}\geqslant\boldsymbol{Cx}$。

证明：由 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，得 $\boldsymbol{uAx}=\boldsymbol{ub}$。由 $\boldsymbol{uA}\geqslant\boldsymbol{C}$ 及 $\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{ub}=\boldsymbol{uAx}\geqslant\boldsymbol{Cx}$。证毕。

定理 2.12 若 $\boldsymbol{B}$ 是(2.5.1)的最优基，则 $\boldsymbol{u}^0=\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}$是(2.5.2)的最优解。

证明：由 $\boldsymbol{B}$ 是最优基，则 $\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C}\geqslant\boldsymbol{0}$。因此，$\boldsymbol{u}^0=\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}$是一个对偶允许解。设

x^0 是对应于 B 的基本最优解，则有关系

$$Cx^0 = C_B B^{-1} b = u^0 b.$$

由定理 2.11。对任何对偶允许解 u，由关系：

$$ub \geqslant Cx^0 = u^0 b,$$

因此 u^0 是一个对偶最优解。证毕。

一个基 B，若使乘子 $\pi = C_B B^{-1}$ 是对偶允许解，则称 B 为对偶允许基，而对应的 π 称为基本对偶允许解，若使 π 为对偶最优解，则称 B 为对偶最优基，而称 π 为基本对偶最优解。定理 2.12 说明一个最优基必是对偶最优基。

定理 2.13 (2.5.1)和(2.5.2)若同时存在允许解，则必同时有基本最优解，且

$$\min_{u\text{ 为对偶允许}} ub = \max_{x\text{ 为允许}} Cx.$$

证明：由定理 2.11 可知 Cx 有上界，因此，应用单纯形方法，必可求得一个最优基，再根据定理 2.12，命题即可得证，证毕。

定理 2.14 允许解和对偶允许解 x^0，u^0 是最优解和对偶最优解的充要条件为

$$(u^0 A - C)x^0 = 0.$$

证明：由定理 2.11，2.12，2.13，容易推得 x^0，u^0 是最优解和对偶最优解的充要条件为

$$Cx^0 = u^0 b = u^0 A x^0.$$

由此，命题即可得证。证毕。

由于 $x^0 \geqslant 0$，$u^0 A - C \geqslant 0$，故上述充要条件等价于

$$(u^0 P_j - C_j) x_j^0 = 0,\ j = 1, 2, \cdots, n.$$

若由某对偶最优解 u^0，使得某指标 j，满足 $u^0 P_j > C_j$（称 j 对(2.5.2)是松的），则一切最优解 x，必使 $x_j = 0$（称 j 对(2.5.1)是紧的）。若有某最优解 x^0，使得对某指标 j，满足 $x_j^0 > 0$（称 j 对(2.5.1)是松的），则一切对偶最优解 u，必使 $uP_j > C_j$（称 j 对(2.5.2)是紧的）。

对偶理论是线性规划中的基本理论。利用对偶理论，可以证明有关线性不等式组的一些基本结果。

定理 2.15 线性不等式组 $Ax \geqslant b$ 相容的充分必要条件为：

对任意的满足

$$uA = 0,\ u \geqslant 0$$

的 u，都使 $ub \leqslant 0$.

证明：考虑线性规划问题：

$$\min \{0x \mid Ax \geqslant b\},$$

它是问题：

$$\max \{b^T u^T \mid A^T u^T = 0,\ u^T \geqslant 0\}$$

的对偶规划。根据对偶理论可知

$$\{Ax \geqslant b\}\text{ 有允许解} \Leftrightarrow$$
$$\min \{0x \mid Ax \geqslant b\} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\max\{b^T u^T \mid A^T u^T = 0,\ u^T \geqslant 0\} = 0.$$

证毕。

定理 2.16 设 $Ax \geqslant b$ 有允许解，且

$$Ax \geqslant b \Rightarrow ax \geqslant d,$$

则必存在向量 $u^0 \geqslant 0$，使得 $u^0A = a$，$u^0b \geqslant d$。

证明

$$\{Ax \geqslant b \Rightarrow ax \geqslant d\} \Leftrightarrow$$
$$\min\{ax \mid Ax \geqslant b\} \geqslant d \Leftrightarrow$$
$$\max\{b^Tu^T \mid A^Tu^T = a^T, \ u^T \geqslant 0\} \geqslant d,$$

故必存在向量 $u^0 \geqslant 0$，使得 $u^0A = a$，$u^0b \geqslant d$，证毕。

假如将对偶规划的变量 u 作如下的变换：

$$u^T = w - v, \ w \geqslant 0, \ v \geqslant 0,$$

则对偶规划(2.5.2)可以写成如下的标准线性规划形式：

求 $\max - b^Tw + b^Tv,$

满足
$$-A^Tw + A^Tv + y = -C^T, \quad (2.5.3)$$
$$w, v, y \geqslant 0.$$

根据定义，(2.5.3)的对偶规划应写为

求 $\min - x^TC^T,$

满足
$$-x^TA^T \geqslant -b^T, \quad (2.5.4)$$
$$x^TA^T \geqslant b^T,$$
$$x^T \geqslant 0.$$

问题(2.5.4)就是问题(2.5.1)。因此，一个线性规划问题的对偶的对偶，便是其本身。

假如原线性规划问题呈如下形式

求 $\max\{Cx \mid Ax \geqslant b, \ x \geqslant 0\}.$

那么，容易证明，对偶规划应写为

求 $\min\{ub \mid uA \geqslant C, \ u \geqslant 0\},$

这时，松紧关系可写成如下形式

允许解 x^0，u^0 分别是最优解的充要条件为

$$(u^0A - C)x^0 = 0, \ u^0(Ax^0 - b) = 0.$$

一般地，假如原线性规划问题呈如下形式

求 $\max \ Cx + Ey,$

满足
$$Ax + Fy = b,$$
$$\bar{A}x + \bar{F}y \leqslant \bar{b},$$
$$x \geqslant 0.$$

那么，容易证明，对偶规划应写为

求 $\min \ ub + v\bar{b},$

满足
$$uA + v\bar{A} \geqslant C,$$
$$uF + v\bar{F} = F,$$
$$v \geqslant 0.$$

这时，松紧关系可写成如下形式

允许和对偶允许解(x^0, y^0)，(u^0, v^0)分别是最优和对偶最优解的充要条件是

$$(u^0A + v^0\bar{A} - C)x^0 = 0,$$

$$v^0(\bar{A}x^0+\bar{F}y^0-\bar{b})=0.$$

图 2.3 可能会有助于我们记忆对偶关系。

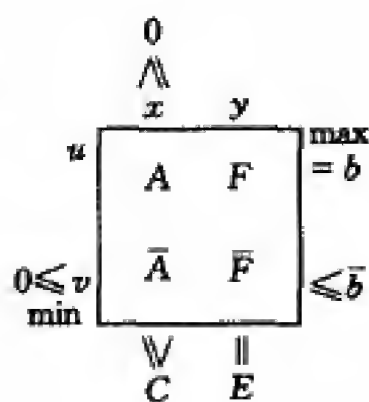


图 2.3

单纯形方法通过允许基(所有的 $b_{i0}\geqslant 0$)的逐次迭代,直到所有的 $b_{0j}\geqslant 0$(即所得的允许基也是对偶允许基)。所谓对偶单纯形方法,是通过对偶允许基的逐次迭代(即始终保持所有 $b_{0j}\geqslant 0$),直到所有的 $b_{i0}\geqslant 0$(即所得的对偶允许基也是允许基)。

对偶单纯形方法的计算程序:

步骤 1 设已给一对偶允许基 $B=(P_{j_1}\cdots P_{j_m})$,单纯形表 $T(B)=(b_{ij})$。因此有

$$b_{0j}\geqslant 0,\ j=1,\cdots,n.$$

步骤 2 若 $b_{i0}\geqslant 0,\ i=1,\cdots,m$,则步骤终止,已获得基本最优解。相反,设

$$j_r=\min\{j_i\mid b_{i0}<0,\ i=1,\cdots,m\}.$$

步骤 3 若 $b_{rj}\geqslant 0,\ j=1,\cdots,n$,则步骤终止。第 r 个方程产生矛盾,问题无允许解。相反,求

$$\theta=\max\left\{\frac{b_{0j}}{b_{rj}}\,\middle|\,b_{rj}<0,\ 1\leqslant j\leqslant n\right\}.$$

设

$$s=\min\left\{j\,\middle|\,\frac{b_{0j}}{b_{rj}}=\theta,\ b_{rj}<0,\ 1\leqslant j\leqslant n\right\}.$$

步骤 4 以 b_{rs} 为旋转元,作旋转变换后,可得基

$$\bar{B}=(P_{j_1}\cdots P_s\cdots P_{j_m})$$

以及 $T(\bar{B})=(\bar{b}_{ij})$。其中

$$\bar{b}_{rj}=\frac{b_{rj}}{b_{rs}},\ j=1,\cdots,n,$$

$$\bar{b}_{ij}=b_{ij}-\frac{b_{rj}}{b_{rs}}b_{is},\ i\neq r,\ j=0,1,\cdots,n.$$

用 $\bar{B}$ 代替 B, $T(\bar{B})$ 代替 $T(B)$,然后转到步骤 1。

对偶单纯形方法,实际上就是在对偶规划问题上应用通常的单纯形方法。

2.6 变量带上界限制的线性规划问题

考虑如下形式的问题

$$\max\{x_0\mid x_0=Cx,\ Ax=b,\ 0\leqslant x\leqslant d\},\tag{2.6.1}$$

其中

$$d=\begin{pmatrix}d_1\\ d_2\\ \vdots\\ d_n\end{pmatrix},\ 0<d_j<+\infty,\ j=1,2,\cdots,n.$$

虽然将条件 $x_j \leqslant d_j$ 化为 $x_j + x'_j = d_j(x'_j \geqslant 0)$后,就可合并到 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 中,但是,这样就往往会使单纯形表扩大到很难计算。这里,介绍一种不需要扩大单纯表的计算程序。

对基 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{P}_{j_1} \cdots \boldsymbol{P}_{j_m})$,设 $T(\boldsymbol{B}) = (b_{ij})$。让

$$\boldsymbol{J} = \{j \mid x_j \text{ 为} \boldsymbol{B} \text{ 的非基变量}\}.$$

$\{\boldsymbol{J}_1 | \boldsymbol{J}_2\}$表示 $\boldsymbol{J}$ 的任一剖分。即

$$\boldsymbol{J}_1 \cup \boldsymbol{J}_2 = \boldsymbol{J},\ \boldsymbol{J}_1 \cap \boldsymbol{J}_2 = \Phi.$$

定义

$$z_{i0} = b_{i0} - \sum_{j \in J_2} b_{ij} d_j,\ i = 0, 1, \cdots, m.$$

称方程组

$$x_0 = \boldsymbol{Cx},\ \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

的解:

$$\begin{aligned} &x_0 = z_{00}, \\ &x_{j_i} = z_{i0},\ i = 1, \cdots, m, \\ &x_j = d_j,\ j \in \boldsymbol{J}_2, \\ &x_j = 0,\ j \in \boldsymbol{J}_1, \end{aligned} \tag{2.6.2}$$

为对应于 $\boldsymbol{B}$ 的剖分$\{\boldsymbol{J}_1 | \boldsymbol{J}_2\}$的基本解。

定理 2.17 若对 $j \in \boldsymbol{J}_1$ 有 $b_{0j} \geqslant 0$,对 $j \in \boldsymbol{J}_2$ 有 $b_{0j} \leqslant 0$,且 $0 \leqslant z_{i0} \leqslant d_{j_i}$, $i = 1, 2, \cdots, m$.则对应于 $\boldsymbol{B}$ 的剖分$\{\boldsymbol{J}_1 | \boldsymbol{J}_2\}$的基本解便是(2.6.1)的最优解。

证明:因为

$$\begin{gathered} x_0 = b_{00} - \sum_{j \in J_1} b_{0j} x_j - \sum_{j \in J_2} b_{0j} x_j, \\ b_{0j} \geqslant 0,\ j \in \boldsymbol{J}_1, \\ x_j \geqslant 0,\ j \in \boldsymbol{J}, \end{gathered}$$

故

$$x_0 \leqslant b_{00} - \sum_{j \in J_2} b_{0j} x_j,$$

因为

$$b_{0j} \leqslant 0, x_j \leqslant d_j, j \in \boldsymbol{J}_2,$$

故

$$x_0 \leqslant b_{00} - \sum_{j \in J_2} b_{0j} x_j = z_{00}.$$

另一方面,对应于剖分$\{\boldsymbol{J}_1 | \boldsymbol{J}_2\}$的基本解恰巧使

$$x_0 = z_{00},\ \text{且}\ 0 \leqslant z_{i0} \leqslant d_{j_i}, i = 1, 2, \cdots, m,$$

因此,它是(2.6.1)的最优解。证毕。

变量代上界限制问题的计算程序:

(1) 任给一基 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{P}_{j_1} \cdots \boldsymbol{P}_{j_m})$,设对应于 $\boldsymbol{B}$ 的单纯形表为 $T(\boldsymbol{B}) = (b_{ij})$。取剖分$\{\boldsymbol{J}_1 | \boldsymbol{J}_2\}$如下:

$$J_1=\{j\mid x_j \text{ 为非基变量, 使 } b_{0j}\geqslant 0\},$$
$$J_2=\{j\mid x_j \text{ 为非基变量, 使 } b_{0j}<0\}.$$

(2) 若 $0\leqslant z_{i0}\leqslant d_{j_i}$, $i=1,\cdots,m$,则步骤终止。由定理2.17,可知已获得最优解。相反,设

$$j_r=\min\{j_i\mid z_{i0}<0 \text{ 或 } z_{i0}>d_{j_i},\ 1\leqslant i\leqslant m\}.$$

若 $z_{r0}<0$,则转到步骤(3);若 $z_{r0}>d_{j_r}$,则转到步骤(4)。

(3) 若对所有的 $j\in J_1$,有 $b_{rj}\geqslant 0$;对所有的 $j\in J_2$,有 $b_{rj}\leqslant 0$,则第 r 个方程是矛盾方程,问题无允许解,步骤终止。相反,设

$$\theta=\max\left\{\frac{b_{0j}}{b_{rj}}\,\middle|\, j\in J_1,\ b_{rj}<0 \text{ 或 } j\in J_2,\ b_{rj}>0\right\},$$

$$s=\min\left\{j\,\middle|\,\frac{b_{0j}}{b_{rj}}=\theta, \text{且当 } j\in J_1 \text{ 时},\ b_{rj}<0,\ \text{当 } j\in J_2 \text{ 时},\ b_{rj}>0\right\}.$$

然后转到步骤(5)。

(4) 若对所有的 $j\in J_1$,有 $b_{rj}\leqslant 0$;对所有的 $j\in J_2$,有 $b_{rj}\geqslant 0$,则第 r 个方程是矛盾方程,问题无允许解,步骤终止。相反,设

$$\theta=\min\left\{\frac{b_{0j}}{b_{rj}}\,\middle|\, j\in J_1,\ b_{rj}>0 \text{ 或 } j\in J_2,\ b_{rj}<0\right\},$$

$$s=\min\left\{j\,\middle|\,\frac{b_{0j}}{b_{rj}}=\theta,\ \text{且当 } j\in J_1 \text{ 时},\ b_{rj}>0,\ \text{当 } j\in J_2 \text{ 时},\ b_{rj}<0\right\}.$$

然后转到步骤(5)。

(5)作(r,s)旋转变换后,可得新的基

$$\bar{B}=(P_{j_1}\cdots P_{j_{r-1}}P_sP_{j_{r+1}}\cdots P_{j_m})\text{及 } T(\bar{B})=(\bar{b}_{ij}).$$

(6) 若 $z_{r0}<0$, $s\in J_1$,则置 $\bar{J}_1=(J_1\setminus s)\cup j_r$, $\bar{J}_2=J_2$;若 $z_{r0}<0$, $s\in J_2$,则置 $\bar{J}_1=J_1\cup j_r$, $\bar{J}_2=J_2\setminus s$。

若 $z_{r0}>d_{j_r}$, $s\in J_1$,则置 $\bar{J}_1=J_1\setminus s$, $\bar{J}_2=J_2\cup j_r$;若 $z_{r0}>d_{j_r}$, $s\in J_2$,则置 $\bar{J}_1=J_1$, $\bar{J}_2=(J_2\setminus s)\cup j_r$。

(7) 置

$$\bar{z}_{i0}=\bar{b}_{i0}-\sum_{j\in\bar{J}_2}\bar{b}_{ij}d_j,\ i=0,1,\cdots,m,$$

以 $\bar{B}$, $T(\bar{B})$, $\bar{z}_{i0}$分别代替 B, $T(B)$, z_{i0},转到步骤(2)。

定理2.18 算法中所得的 $T(\bar{B})=(\bar{b}_{ij})$和$\{\bar{J}_1|\bar{J}_2\}$满足:

$$\text{当 } j\in\bar{J}_1 \text{ 时},\ \bar{b}_{0j}\geqslant 0,$$
$$\text{当 } j\in\bar{J}_2 \text{ 时},\ \bar{b}_{0j}\leqslant 0.$$

证明:这里,只证明情形 $z_{r0}>d_{j_r}$, $s\in J_2$。对其余的情形可完全类似地分别证明。

根据步骤(4),这时有 $b_{rs}<0$, $b_{0s}\leqslant 0$。根据步骤(6),这时有 $\bar{J}_1=J_1$, $\bar{J}_2=(J_2\setminus s)\cup j_r$。因为

$$\bar{b}_{0j}=b_{0j}-\frac{b_{0s}}{b_{rs}}b_{rj},$$

若 $j\in\bar{J}_1=J_1$,且 $b_{rj}\leqslant 0$,则由 $b_{0j}\geqslant 0$,可得 $\bar{b}_{0j}\geqslant b_{0j}\geqslant 0$;
若 $j\in\bar{J}_1=J_1$,且 $b_{rj}>0$,则由 θ 的取法,可知

$$\bar{b}_{0j}=b_{rj}\left(\frac{b_{0j}}{b_{rj}}-\theta\right)\geqslant 0.$$

若 $j\in\bar{J}_2\setminus j_r$，则 $j\in J_2$，因此 $b_{0j}\leqslant 0$。这时，若 $b_{rj}\geqslant 0$，则显然有 $\bar{b}_{0j}\leqslant b_{0j}\leqslant 0$；若 $b_{rj}<0$，则由 θ 的取法，可得

$$\bar{b}_{0j}=b_{rj}\left(\frac{b_{0j}}{b_{rj}}-\theta\right)\leqslant 0.$$

最后，若 $j=j_r$，则

$$\bar{b}_{0j_r}=-\frac{b_{0s}}{b_{rs}}<0.$$

证毕。

定理 2.19 $\bar{z}_{00}\leqslant z_{00}$，
$\bar{z}_{00}=z_{00}$，当且仅当 $\theta=0$ 时

证明：这里也只证明情形 $z_{r0}>d_{j_r}$，$s\in J_2$。其他情形可完全类似地证明。因为

$$\begin{aligned}\bar{z}_{00} &= \bar{b}_{00}-\sum_{j\in\bar{J}_2}\bar{b}_{0j}d_j\\ &= \bar{b}_{00}-\sum_{j\in J_2}\bar{b}_{0j}d_j-\bar{b}_{0j_r}d_{j_r}+\bar{b}_{0s}d_s\\ &= \bar{b}_{00}-\sum_{j\in J_2}\bar{b}_{0j}d_j-\bar{b}_{0j_r}d_{j_r}\\ &= b_{00}-\theta b_{r0}-\sum_{j\in J_2}(b_{0j}-\theta b_{rj})d_j+\theta d_{j_r}\\ &= z_{00}-\theta(z_{r0}-d_{j_r}).\end{aligned}$$

注意 $\theta\geqslant 0$，命题即可得证。证毕。

定理 2.20 上述变量带上界限制问题的计算程序必在有限步内终止。

证明： 只要能证明计算过程中，同样的基 $\boldsymbol{B}$ 及剖分 $\{\boldsymbol{J}_1|\boldsymbol{J}_2\}$ 不重复出现(即不发生死循环)，则步骤必在有限步内终止。现在，用反证法，假设对某变量带上界限制问题(2.6.1)，上述算法产生了死循环

$$\begin{array}{ccccc}T(\boldsymbol{B}_1)\to & T(\boldsymbol{B}_2)\to\cdots\to & T(\boldsymbol{B}_k)\to & T(\boldsymbol{B}_1)\\ \{\boldsymbol{J}_1^1|\boldsymbol{J}_2^1\} & \{\boldsymbol{J}_1^2|\boldsymbol{J}_2^2\} & \{\boldsymbol{J}_1^k|\boldsymbol{J}_2^k\} & \{\boldsymbol{J}_1^1|\boldsymbol{J}_2^1\}\end{array}$$

将 $T(\boldsymbol{B})$的列指标集合$\{1,\cdots,n\}$剖分为子集 F,G,H 之和，使得

$j\in F\Leftrightarrow x_j$ 是所有的 $\boldsymbol{B}_t$ 基变量。称 F 为固定基变量指标集。

$j\in H\Leftrightarrow x_j$ 是所有 $\boldsymbol{B}_t$ 的非基变量。称 H 为固定非基变量指标集。

$j\in G\Leftrightarrow x_j$ 既是某 $\boldsymbol{B}_t$ 的基变量，也是某 $\boldsymbol{B}_u$ 的非基变量。称 G 为循环变量指标集。

将 $T(\boldsymbol{B})$的行指标集合$\{1,\cdots,m\}$剖分为子集 L,M 之和，使得

$j\in L\Leftrightarrow$ 位于第 i 个方程的基变量 x_j，必使 $j\in F$。称 L 是对应于固定基变量的行指标集。

$j\in M\Leftrightarrow$ 位于第 i 个方程的基变量 x_j，必使 $j\in G$。称 M 是对应于循环基变量的行指标集。

设

$$T(\boldsymbol{B}_t)=(b_{ij}^t),\quad i=1,\cdots,k,$$

$$z_{i0}^t = b_{i0}^t - \sum_{j\in J_2^t} b_{ij}^t d_j,\ t = 1,\cdots,k,\ i = 0,1,\cdots,m. \tag{2.6.3}$$

由 $T(\boldsymbol{B}_t)$变换到 $T(\boldsymbol{B}_{t+1})$的旋转行为 $r(t)$，旋出基变量为 x_{r_t}，旋转列为 s_t，旋入非基变量为 x_{s_t}（$t=1,\cdots,k$，而 $\boldsymbol{B}_{k+1}=\boldsymbol{B}_1$）。

根据上述定义，立即可得

$$G = \bigcup_{t=1}^k \{s_t\} = \bigcup_{t=1}^k \{r_t\},\ M = \bigcup_{t=1}^k \{r(t)\}. \tag{2.6.4}$$

根据定理 2.19，可得

$$z_{00}^1 \geqslant z_{00}^2 \geqslant \cdots \geqslant z_{00}^k \geqslant z_{00}^1$$

即

$$z_{00}^1 = z_{00}^2 = \cdots = z_{00}^k \tag{2.6.5}$$

因此，在循环过程中，所有的 $\theta=0$，即 $b_{0s_t}^t=0,\ t=1,\cdots,k$。由旋转变换关系

$$\bar{b}_{0j} = b_{0j} - \theta b_{rj}$$

立即可得

$$b_{0j}^1 = b_{0j}^2 = \cdots = b_{0j}^k,\ j=0,1,\cdots n.$$

由 $b_{0s_t}^t=0$，可得

$$b_{0j}^t = 0,\ 对\ j\in G,\ t=1,\cdots,k. \tag{2.6.6}$$

令

$$q = \max\{j \mid j\in G\}, \tag{2.6.7}$$

为了书写方便，不失一般性，假设 $r_1 = s_f = q$，而对 $1<t<f$，$s_t\neq q$。且记 $r(1)=v$，$r(f)=r$（即 $T(\boldsymbol{B}_1)$的旋转行为 v，对应的旋出基变量为 x_q，$T(\boldsymbol{B}_f)$的旋转行为 q，旋转行为 r）。设

$$\boldsymbol{B}_1 = (\boldsymbol{P}_{j_1}\cdots\boldsymbol{P}_{j_m}),\ \boldsymbol{B}_f = (\boldsymbol{P}_{f_1}\cdots\boldsymbol{P}_{f_m}),\ j_v = q.$$

对 $T(\boldsymbol{B}_1)=(b_{ij}^1)$，根据旋转行的选取规则，可得

$$0\leqslant z_{i0}^1 \leqslant d_{j_i},\ 对所有的\ j_i\in G\setminus q.$$

因为不然的话，就不能取 x_q 为旋出基变量。

对 z_{v0}^1有两种情形：

若 $z_{v0}^1<0$，则由步骤(6)可知 $q\in \boldsymbol{J}_1^t$(对 $2\leqslant t\leqslant f$)；

若 $z_{v0}^1>d_q$，则 $q\in \boldsymbol{J}_2^t$(对 $2\leqslant t\leqslant f$)。

记对应于 $\boldsymbol{B}_1$ 的剖分$\{\boldsymbol{J}_1^1 \mid \boldsymbol{J}_2^1\}$的基本解为

$$\boldsymbol{x}^1 = (x_1^1,\cdots,x_n^1)^{\mathrm{T}},$$

其中

$$x_{j_i}^1 = z_{i0}^1,\ i=1,\cdots,m, \tag{2.6.8}$$

$$x_j^1 = d_j,\ j\in \boldsymbol{J}_2^1, \tag{2.6.9}$$

$$x_j^1 = 0,\ 其余的分量, \tag{2.6.10}$$

对 $T(\boldsymbol{B}_f)=(b_{ij}^f)$，由于 $\boldsymbol{x}^1$ 是(2.6.1)的基本解，自然必满足方程：

$$x_{f_r}^1 + \sum_{j\in J_1^f} b_{rj}^f x_j^1 + \sum_{j\in J_2^f} b_{rj}^f x_j^1 = b_{r0}^f. \tag{2.6.11}$$

令

$$G_1=(G\cap J_1^f)\setminus q,\quad H_1=H\cap \boldsymbol{J}_1^f,$$
$$G_2=(G\cap J_2^f)\setminus q,\quad H_2=H\cap \boldsymbol{J}_2^f,$$

由于

$$b_{rj}^f=0,\quad j\in F,$$
$$x_j^1=0,\quad j\in H\cap \boldsymbol{J}_1^f,$$

则

$$x_r^1+x_q^1 b_{rq}^f+\sum_{j\in G_1} b_{rj}^f x_j^1+\sum_{j\in G_2} b_{rj}^f x_j^1+\sum_{j\in H_2} b_{rj}^f d_j=b_{r0}^f. \tag{2.6.12}$$

下面分四种情形讨论。

(ⅰ) $z_{r0}^f<0$, $z_{v0}^1=x_q^1<0$, $q\in J_1^f$.

因为对所有的 $j\in G$, 有 $b_{0j}^f=0$(由式(2.6.7)),根据步骤(3)中旋转列的选取规则,必有

$$b_{rj}^f\geqslant 0,\ j\in G_1,$$
$$b_{rj}^f\leqslant 0,\ j\in G_2,$$
$$b_{rq}^f<0.$$

(否则就不可能取 q 为 $T(\boldsymbol{B}_f)$的旋转列)。

因为 $\boldsymbol{x}^1$ 满足条件:

$$0\leqslant x_j^1\leqslant d_j,\ j\in(G\setminus q) \tag{2.6.13}$$

(因为 $x_{j_i}^1=z_{i0}^1$,而 $0\leqslant z_{i0}^1\leqslant d_{ji}$,对 $j_i\in(G\setminus q)$),所以有

$$b_{rq}^f x_q^1>0, \tag{2.6.14}$$
$$b_{rj}^f x_j^1\geqslant 0,\ j\in G_1, \tag{2.6.15}$$
$$b_{rj}^f x_j^1\geqslant b_{rj}^f d_j,\ j\in G_2, \tag{2.6.16}$$

因此,从方程(2.6.12)可推得不等式

$$\sum_{j\in G_2} b_{rj}^f d_j+\sum_{j\in H_2} b_{rj}^f d_j=\sum_{j\in J_2^f} b_{rj}^f d_j\leqslant b_{r0}^f. \tag{2.6.17}$$

另一方面,由 $z_{r0}^f<0$,可得

$$b_{r0}^f-\sum_{j\in J_2^f} b_{rj}^f d_j<0.$$

与式(2.6.17)相矛盾。

(ⅱ) $z_{r0}^f<0$, $z_{v0}^1=x_q^1>d_q$, $q\in \boldsymbol{J}_2^f$.

只要注意这时必有 $b_{rq}^f>0$,就可和情形(ⅰ)相似地导致矛盾。

(ⅲ) $z_{r0}^f>d_{f_r}$, $z_{v0}^1=x_q^1<0$, $q\in \boldsymbol{J}_1^f$.

根据步骤(4)中旋转列的选取规则,必有

$$b_{rj}^f\leqslant 0,\ j\in G_1,$$
$$b_{rj}^f\geqslant 0,\ j\in G_2,$$
$$b_{rq}^f>0.$$

由此,从方程(2.6.12),可推得不等式

$$\sum_{j\in G_2} b_{rj}^f d_j + \sum_{j\in H_2} b_{rj}^f d_j + d_{f_r} = \sum_{j\in J_2^f} b_{rj}^f d_j + d_{f_r} \geqslant b_{r0}^f. \tag{2.6.18}$$

另一方面，由 $z_{r0}^f > d_{f_r}$，可得

$$b_{r0}^f - \sum_{j\in J_2^f} b_{rj}^f d_j > d_{f_r}.$$

与(2.6.18)相矛盾。

(ⅳ) $z_{r0}^f > d_{f_r}$, $z_{v0}^1 = x_q^1 > d_q$, $q \in J_2^f$.

只要注意这时必有 $b_{rq}^f < 0$，就可推得

$$b_{rq}^f d_q + \sum_{j\in G_2} b_{rj}^f d_j + \sum_{j\in H_2} b_{rj}^f d_j + d_{f_r} = \sum_{j\in J_2^f} b_{rj}^f d_j + d_{f_r} \geqslant b_{r0}^f,$$

从而与 $z_{r0}^f > d_{f_r}$ 相矛盾。证毕。

2.7 几何意义

现在，将 n 维向量 x 看做 n 维欧氏空间中的点。对不同的点 x, $x^1, \cdots, x^k$，若存在非负实数 $a_1, \cdots, a_k$, $\sum_{i=1}^k a_i = 1$，使得

$$x = a_1 x^1 + \cdots + a_k x^k$$

则称 x 为 $x^1, \cdots, x^k$ 的一个凸组合。由所有凸组合所构成的点集 S：

$$S = \left\{ x \mid x = \sum_{i=1}^k a_i x^i,\ \sum_{i=1}^k a_i = 1,\ a_i \geqslant 0,\ i = 1, \cdots, k \right\}$$

称为 $\{x^1, \cdots, x^k\}$ 的凸包。记作 $\{x^1, \cdots, x^k\}^\Delta$。特别地，凸包 $\{x^1, x^2\}^\Delta$ 是一个线段，通常记作 $\overline{x^1x^2}$。一个点集 D，若对 D 中任意的两点 x 和 y，都有 $\overline{xy} \subseteq D$，则称 D 为一个凸集。容易证明，两个或两个以上的凸集的交集仍是凸集；若 D 是一个凸集，则对任意的有限个点 $x^i \in D$, $i = 1, 2, \cdots, k$；必有 $\{x^1, \cdots, x^k\}^\Delta \subseteq D$。对凸集 D 中的点 x，若 D 中不存在 x^1 和 x^2, $x^1 \neq x^2$ 以及 $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_1 + a_2 = 1$，使得

$$x = a_1 x^1 + a_2 x^2,$$

则称 x 为 D 的一个顶点；顶点不是凸集中任何线段的内点。联系到线性规划问题的定义域

$$\{x \mid Ax = b,\ x \geqslant 0\},$$

容易证明，它是一个凸集，通常称其为凸多面体。

定理 2.21 设 x 为凸多面体 $\{x \mid Ax = b,\ x \geqslant 0\}$ 中的任一顶点，当 $j \in J_1$ 时，$x_j > 0$；当时，$j \in J_2$, $x_j = 0$，则对 $j \in J_1$ 中的所有列向量 P_j 必线性无关。其中

$$J_1 \cup J_2 = \{1, 2, \cdots, n\}.$$

证明：假设不这样，则存在一组不全为零的数 δ_j, $j \in J_1$ 使得

$$\sum_{j\in J_1} \delta_j P_j = 0.$$

取

$$\theta = \min\left\{ \frac{x_j}{|\delta_j|} \,\middle|\, \delta_j \neq 0,\ j \in J_1 \right\},$$

作向量 x^1 和 x^2 如下：

$$\begin{aligned} x_j^1 &= x_j + \theta\delta_j, \quad & j \in J_1, \\ x_j^1 &= x_j, & j \in J_2, \\ x_j^2 &= x_j - \theta\delta_j, & j \in J_1, \\ x_j^2 &= x_j, & j \in J_2, \end{aligned}$$

则容易证明，x^1 和 x^2 仍满足约束条件：

$$Ax = b,\ x \geqslant 0.$$

但这时有关系

$$x = \frac{x^1 + x^2}{2},$$

这就与 x 是顶点相矛盾。证毕。

定理 2.22 多面体

$$\{x \mid Ax = b,\ x \geqslant 0\}$$

中的点 x 是它的顶点的充分必要条件为：x 是一个基本允许解。

证明：设 A 为 $m \times n$ 的矩阵，A 的秩为 m。

必要性。不失一般性，设 $x_j > 0, j = 1, \cdots, k$；$x_j = 0, j = k+1, \cdots, n$。由定理 2.21，向量 $P_1 \cdots P_k$ 线性无关。由 A 的秩为 m，则可找出适当的 $m-k$ 个向量；例如设为 $P_{k+1} \cdots P_m$，使 $P_1 \cdots P_m$ 线性无关。因此，$B = (P_1 \cdots P_m)$ 构成一个基，它对应的基本解便是 x。

充分性。不妨假设，x 是对应于基 $B = (P_1 \cdots P_m)$ 的基本允许解，因此有

$$x_j = 0, j = m+1, \cdots, n \tag{2.7.1}$$

$$Bx_B = b,\ x_B = (x_1, \cdots, x_m)^{\mathrm{T}}. \tag{2.7.2}$$

若 x 不是多面体的顶点，则存在两个不同的允许解 x^1 和 x^2，以及 $a_1 > 0, a_2 > 0, a_1 + a_2 = 1$，使得

$$x = a_1 x^1 + a_2 x^2.$$

由(2.7.1)及允许解的分量的非负性，可知

$$x_j^1 = x_j^2 = 0, j = m+1, \cdots n,$$

因此可得

$$Bx_B^1 = Bx_B^2 = Bx_B = b,$$
$$x_B^1 = x_B^2 = x_B = B^{-1}b$$

与 $x^1 \neq x^2$ 相矛盾。证毕。

凸多面体中的两个不同的顶点 x^1 和 x^2，若不存在凸多面体中的线段 $\overline{z^1z^2}$，使得 $\overline{z^1z^2} \cap \overline{x^1x^2} = \{x\}$，且 x 不同于 x^1, x^2, z^1, z^2，则称顶点 x^1 与 x^2 相邻。连接两个相邻顶点的线段，称为凸多面体的棱。

定理 2.23 设有允许基 $B^1 = (P_1 \cdots P_{r-1} P_r P_{r+1} \cdots P_m)$，$B^2 = (P_1 \cdots P_{r-1} P_s P_{r+1} \cdots P_m)$，对应的基本允许解(即顶点)分别为 x^1, x^2，设 B^1 经过 (r, s) 旋转变换后得到 B^2，则顶点 x^1 和 x^2 相邻。

证明：设若相反，有允许解 z^1 和 z^2，使得

$$\overline{z^1z^2} \cap \overline{x^1x^2} = \{x\},\ x \neq x^1, x^2, z^1, z^2.$$

因为 $x_j^1 = x_j^2 = 0$，对 $m+1 \leqslant j \neq s \leqslant n$，$x \in \overline{x^1x^2}$，故 $x_j = 0$，对于 $m+1 \leqslant j \neq s \leqslant n$，又因为 $x \in \overline{z^1z^2}$，$z^1 \geqslant 0$，$z^2 \geqslant 0$，，故 $z_j^1 = z_j^2 = 0$，对 $m+1 \leqslant j \neq s \leqslant n$。因此 x^1, x^2, z^1, z^2 都满足条件

$$\sum_{j=1}^{m} x_j \boldsymbol{P}_j + x_s \boldsymbol{P}_s = \boldsymbol{b}$$

$$x_j = 0, \text{对 } m+1 \leqslant j \neq s \leqslant n$$

$$\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$$

但是，满足上述条件的解集是线段 $\overline{x^1x^2}$。因此 $z^1, z^2 \in \overline{x^1x^2}$，与假设相矛盾。证毕。

定理 2.22 和 2.23 说明了单纯形方法的计算过程是由一个顶点沿着棱走到另一个相邻的顶点，而棱的方向便是极方向。

基本允许解这一概念是对标准形式的线性规划问题而言。顶点这一概念与约束条件的表达形式无关。今后，当问题的约束条件还未化成标准形式时，常常使用顶点这一概念。

2.8 字典序单纯形方法

在 2.2 中所介绍的单纯形方法，旋转列和旋转行的选择，都与变量的排列次序密切相关。一旦排定次序后，计算过程也就随着确定了。其基本思想是这样：假设定义一系列问题 P^k：

$$\max\{\boldsymbol{Cx} \mid \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0},\ \text{当 } j > k \text{ 时},\ x_j = 0\},$$

那么，仅当求得 P^k 的最优解后，才继续考虑问题 P^{k+1}。下面介绍一种比较灵活的选取旋转元的单纯形方法，通常称作字典序单纯形方法。这一方法将在线性整数规划中得到应用。

线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解集是一个 $n-m$ 维的线性流形，其中有 $n-m$ 个变量可任意地取值。对 $\boldsymbol{A}$ 中的任意的基 $\boldsymbol{B}$，记它的非基变量为参变量 $t_1, \cdots t_d, d = n - m$。以非基变量为参数，从方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 中，用高斯消去法，解出基变量后，可将线性规划问题化成如下的参数形式：

求 $\max\ x_0$，满足条件

$$x_0 = \alpha_{00} + \sum_{j=1}^{d} \alpha_{0j}(-t_j),$$

$$x_1 = \alpha_{10} + \sum_{j=1}^{d} \alpha_{1j}(-t_j),$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$x_n = \alpha_{n0} + \sum_{j=1}^{d} \alpha_{nj}(-t_j),$$

$$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \cdots, n.$$

当某个 x_i 是非基变量时，对应的方程式实际上是恒等式：

$$x_i = 0 + (-1)(-x_i).$$

记向量

$$\overline{\boldsymbol{x}} = (x_0, x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} = (x_0 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\alpha}_j = (\alpha_{0j}, \alpha_{1j}, \cdots, \alpha_{nj})^{\mathrm{T}},\ j = 0, 1, \cdots d,$$

则问题又可缩写成如下的向量形式

$$\text{求}\max\left\{x_0 \mid \overline{x} = \boldsymbol{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^{d}\boldsymbol{\alpha}_j(-t_j), x_i \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,n\right\}.$$

容易证明以下事实

(ⅰ)若 $\alpha_{i0}\geqslant 0, i=1,2,\cdots,n$,则 $\overline{x}=\boldsymbol{\alpha}_0$ 便是一个基本允许解。

(ⅱ)若 $\alpha_{0j}\geqslant 0, j=1,2,\cdots d$,则对任何允许解 $\overline{x}$,必使 $x_0\leqslant\alpha_{00}$。

(ⅲ)若所有的 $\alpha_{i0}\geqslant 0, \alpha_{0j}\geqslant 0, i=1,2,\cdots,n, j=1,2,\cdots d$,则$\overline{x}=\boldsymbol{\alpha}_0$ 是一个基本最优解。

(ⅳ)若有某 s,使得 $\alpha_{0s}<0, \boldsymbol{\alpha}_s<\mathbf{0}$,,则 $\boldsymbol{y}'=-\boldsymbol{\alpha}_s$ 是一个极射向,线性规划问题无最大值。

(ⅴ)若有某 r,使得 $\alpha_{r0}<0, \alpha_{rj}\geqslant 0, j=1,2,\cdots d$,则线性规划问题无允许解。

对参数表示形式

$$\overline{x} = \boldsymbol{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^{d}\boldsymbol{\alpha}_j(-t_j),$$

假如要用 x_r 代替t_s,作为新的第 s 个参变量,那么只要从 x_r 的表达式中解出t_s,代入其他各式即成。设用 x_r 代替t_s 后的参数表达式为

$$\overline{x} = \overline{\boldsymbol{\alpha}}_0 + \sum_{j=1}^{d}\overline{\boldsymbol{\alpha}}_j(-\overline{t}_j),$$

其中

$$\overline{t}_s = x_r,\ \overline{t}_j = t_j,\ j\neq s,$$

则$\overline{\boldsymbol{\alpha}}_j$ 与$\boldsymbol{\alpha}_j$ 之间有如下的关系式:

定理 2.24 $\overline{\boldsymbol{\alpha}}_s = -\dfrac{1}{\alpha_{rs}}\boldsymbol{\alpha}_s, \overline{\boldsymbol{\alpha}}_j = \boldsymbol{\alpha}_j - \dfrac{\alpha_{rj}}{\alpha_{rs}}\boldsymbol{\alpha}_s,\ j\neq s.$

证明:从关系式

$$x_r = \alpha_{r0} + \sum_{j\neq s}\alpha_{rj}(-t_j) + \alpha_{rs}(-t_s)$$

可解得

$$t_s = \frac{\alpha_{r0}}{\alpha_{rs}} + \sum_{j\neq s}\frac{\alpha_{rj}}{\alpha_{rs}}(-t_j) + \frac{1}{\alpha_{rs}}(-x_r).$$

代入 $\overline{x}$ 的表达式中,可得

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \boldsymbol{\alpha}_0 + \sum_{j\neq s}\boldsymbol{\alpha}_j(-t_j) + \boldsymbol{\alpha}_s\left[-\frac{\alpha_{r0}}{\alpha_{rs}} - \sum_{j\neq s}\frac{\alpha_{rj}}{\alpha_{rs}}(-t_j) - \frac{1}{\alpha_{rs}}(-x_r)\right] \\ &= \left(\boldsymbol{\alpha}_0 - \frac{\alpha_{r0}}{\alpha_{rs}}\boldsymbol{\alpha}_s\right) + \sum_{j\neq s}\left(\boldsymbol{\alpha}_j - \frac{\alpha_{rj}}{\alpha_{rs}}\boldsymbol{\alpha}_s\right)(-t_j) + \frac{\boldsymbol{\alpha}_s}{\alpha_{rs}}x_r \\ &= \overline{\boldsymbol{\alpha}}_0 + \sum_{j\neq s}\overline{\boldsymbol{\alpha}}_j(-\overline{t}_j) + \overline{\boldsymbol{\alpha}}_s(-\overline{t}_s).\end{aligned}$$

证毕。

一个非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$,若按分量的下标顺序,第一个不为零的分量是正数,则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 是字典序正,记作 $\boldsymbol{\alpha}\succ 0$。若 $-\boldsymbol{\alpha}\succ 0$,则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 是字典序负,记作 $\boldsymbol{\alpha}\prec 0$。若两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和$\boldsymbol{\beta}$,使得 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\succ 0$,则记为 $\boldsymbol{\alpha}\succ\boldsymbol{\beta}$。例如,$(1,-5,-6,4)^{\mathrm{T}}\succ 0$, $(0,0,-1,8)^{\mathrm{T}}\prec 0$, $(0,-1,0,-8)^{\mathrm{T}}\succ(-9,9,8,7)^{\mathrm{T}}$。按照字典序,所有维数相同的向量构成一全序集合。下面,介绍字典序单纯形方法。

考虑问题

$$\max\left\{x_0 \mid \bar{x} = \boldsymbol{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^{d} \boldsymbol{\alpha}_j(-t_j),\ x_i \geqslant 0,\ i = 1,2,\cdots,n\right\}.$$

假设各向量 $\boldsymbol{\alpha}_j$, $j\neq 0$,已使满足 $\boldsymbol{\alpha}_j \succ 0$。如何获得这样的初始表示式,将在本节末叙述。

计算程序:

(1) 计算 $\alpha_{r0}=\min\{\alpha_{i0} \mid i=1,2,\cdots n\}$. 若 $\alpha_{r0}\geqslant 0$,则步骤终止,$\bar{x}=\boldsymbol{\alpha}_0$ 便是问题的最优解。而且对任何允许解 $\bar{x}$,有关系

$$\bar{x} = \boldsymbol{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^{d} \boldsymbol{\alpha}_j(-t_j) \prec \boldsymbol{\alpha}_0\ ,$$

即此时的 $\boldsymbol{\alpha}_0$ 按字典序最大达到了最优。若 $\alpha_{r0}<0$,则进行步骤(2)。

(2) 若所有的 $\alpha_{rj}\geqslant 0, j=1,\cdots,d$,则步骤终止,问题无允许解(因为无非负的 $\boldsymbol{x}$ 满足第 r 个方程)。相反,进行步骤(3)。

(3) 按照向量的字典序的大小,计算

$$\max\left\{\frac{\boldsymbol{\alpha}_j}{\alpha_{rj}}\,\middle|\,\alpha_{rj}<0,\ j=1,\cdots,d\right\}=\frac{1}{\alpha_{rs}}\boldsymbol{\alpha}_s$$

(4) 用 x_r 替代 t_s,作为新的第 s 个参变量(即作 (r,s) 旋转变换),得新的表达式

$$\bar{x} = \bar{\boldsymbol{\alpha}}_0 + \sum_{j=1}^{d} \bar{\boldsymbol{\alpha}}_j(-\bar{t}_j),$$

其中

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}_s = -\frac{1}{\alpha_{rs}}\boldsymbol{\alpha}_s,\ \bar{\boldsymbol{\alpha}}_j = \boldsymbol{\alpha}_j - \frac{\alpha_{rj}}{\alpha_{rs}}\boldsymbol{\alpha}_s,\ j\neq s,$$

$$\bar{t}_j = t_j,\ j\neq s,\ \bar{t}_s = x_r,$$

然后用新的表达式代替原来的表达式,转到步骤(1)。

定理 2.25 若 $\boldsymbol{\alpha}_j \succ 0,\ j=1,2,\cdots,d$,则

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}_j \succ 0,\ j=1,2,\cdots,d,$$

$$\boldsymbol{\alpha}_0 \succ \bar{\boldsymbol{\alpha}}_0.$$

证明:由 $\alpha_{rs}<0,\ \boldsymbol{\alpha}_s\succ 0$,即得

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}_s = -\frac{1}{\alpha_{rs}}\boldsymbol{\alpha}_s \succ 0.$$

对 $j\neq s,\ 0$,若 $\alpha_{rj}\geqslant 0$,则

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}_j = \boldsymbol{\alpha}_j - \frac{\alpha_{rj}}{\alpha_{rs}}\boldsymbol{\alpha}_s \succcurlyeq \boldsymbol{\alpha}_j \succ 0,$$

若 $\alpha_{rj}<0$,则由 s 的取法(见步骤(3))可知

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}_j = \alpha_{rj}\left(\frac{1}{\alpha_{rj}}\boldsymbol{\alpha}_j - \frac{1}{\alpha_{rs}}\boldsymbol{\alpha}_s\right) \succ 0.$$

又因为

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}_0 = \boldsymbol{\alpha}_0 - \frac{\alpha_{r0}}{\alpha_{rs}}\boldsymbol{\alpha}_s,\ \alpha_{r0}<0,\ \alpha_{rs}<0,\ \boldsymbol{\alpha}_s\succ 0,$$

可得

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}_0 \prec \boldsymbol{\alpha}_0.$$

证毕。

由定理 2.25 可知上述字典序计算程序，在计算过程中，同样的参数表达式決不重复出现，而且，参数表达式的数目不会超过 C_m^n 种，所以，程序必在有限步内终止。

最后，再来讨论寻求字典序正(即 $\boldsymbol{\alpha}_j \succ 0$)的初始表达式的方法，通常称做 M 方法。

首先，任意给一个基 $\boldsymbol{B}$，设其非基变量为 $t_1, \cdots, t_d$。设以 t_j 为参变量的参数表示式为

$$\bar{x} = \boldsymbol{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^{d} \boldsymbol{\alpha}_j(-t_j),$$

假设按字典序的大小求得

$$\min\{\boldsymbol{\alpha}_j \mid j = 1, 2, \cdots, d\} = \boldsymbol{\alpha}_s.$$

若 $\boldsymbol{\alpha}_s \succ 0$，则已获字典序正的表示式。相反，附加一个参考的条件

$$x_{n+1} = M + \sum_{j=1}^{d} (-t_j) \geqslant 0,$$

即

$$\sum_{j=1}^{d} t_j \leqslant M,$$

其中 M 是足够大的数。然后，以 x_{n+1}替代参变量 t_s，可得表示式

$$\bar{x} = \bar{\boldsymbol{\alpha}}_0 + \sum_{j=1}^{d} \bar{\boldsymbol{\alpha}}_j(-\bar{t}_j),$$

其中

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}_s = -\boldsymbol{\alpha}_s,\ \bar{\boldsymbol{\alpha}}_j = \boldsymbol{\alpha}_j - \boldsymbol{\alpha}_s,\ j \neq s,\ \bar{\boldsymbol{\alpha}}_0 = \boldsymbol{\alpha}_0 - M\boldsymbol{\alpha}_s,$$
$$\bar{t}_s = x_{n+1},\ \bar{t}_j = t_j,\ j \neq s;$$

显然，这时已有 $\bar{\boldsymbol{\alpha}}_j \succ 0 (j = 1, 2, \cdots, d)$。因此，就可应用上述字典序单纯形方法求解。只要 M 足够大，加上参考条件后的问题与原问题等价。

2.9 列生成方法

1.7 节给出了一个整数规划转换为线性规划的实例：钢筋下料。

求
$$\min \sum_j x_j, \tag{2.9.1}$$

满足条件

$$\sum_j a_{ij} x_j = b_i,\ i = 1, 2, \cdots, m, \tag{2.9.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} l_i \leqslant l, \text{对所有的方式 } j, \tag{2.9.3}$$

$$a_{ij} \text{ 为非负整数}, \tag{2.9.4}$$

$$x_j \geqslant 0, \text{对所有的方式 } j. \tag{2.9.5}$$

称问题(2.9.1)，(2.9.2)，(2.9.5)为下料问题的主规划。注意，(2.9.2)中 a_{ij} 是待定整数，故主规划实质上是非线性混合规划。对主规划而言，$\boldsymbol{B}^0 = (\boldsymbol{P}_1 \cdots \boldsymbol{P}_m)$是一个允许基，且有

$$(\boldsymbol{B}^0)^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{a_{11}} & & & \mathbf{0}\\ & \frac{1}{a_{22}} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \frac{1}{a_{mm}}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\pi}^0=\boldsymbol{C}_{B^0}(\boldsymbol{B}^0)^{-1}=\left(-\frac{1}{a_{11}},\ -\frac{1}{a_{22}},\cdots,-\frac{1}{a_{mm}}\right).$$

对应于 $\boldsymbol{B}^0$ 的基本解为

$$x_i=\frac{b_i}{a_{ii}},\ i=1,2,\cdots,m, \tag{2.9.6}$$

$$x_j=0, \text{对其余的方案 } j.$$

一般地说,假设已有一允许基 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{P}_{j1}\ \boldsymbol{P}_{j2}\cdots\ \boldsymbol{P}_{jm})$,设已求得

$$\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_{10}\\ b_{20}\\ \vdots\\ b_{m0}\end{bmatrix}$$

这里 $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}$。则对应于 $\boldsymbol{B}$ 的乘子 $\boldsymbol{\pi}$ 为

$$\boldsymbol{\pi}=(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_m)=(-1,\ -1,\cdots,\ -1)\boldsymbol{B}^{-1}$$

$$=\left(-\sum_{i=1}^{m}b_{i1},\ -\sum_{i=1}^{m}b_{i2},\ \cdots,\ -\sum_{i=1}^{m}b_{im}\right)$$

根据改进单纯形算法,假如满足条件

$$\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}_j-C_j=\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}_j+1\geqslant 0, \text{对所有的 } j, \tag{2.9.7}$$

则 $\boldsymbol{B}$ 便是最优基。然而,条件(2.9.7)又等价于下述问题(通常称其为背包问题)的最小值非负。

求

$$\min z=1+\sum_{i=1}^{m}\pi_i a_i, \tag{2.9.8}$$

满足

$$\sum_{i=1}^{m}l_i a_i\leqslant l,\ a_i \text{ 为非负整数。} \tag{2.9.9}$$

称问题(2.9.8),(2.9.9)为下料问题的子规划。它是一类特殊的整数规划问题。

现在,假设已求得子问题的解为

$$a_1=a_1^*,\cdots,a_m=a_m^*,\ z=z^*=1+\sum_{i=1}^{m}\pi_i a_i^*.$$

这时,若 $z^*\geqslant 0$,则步骤终止,$\boldsymbol{B}$ 便是主规划的最优基。若 $z^*<0$,则生成列向量

$$P_s=\begin{bmatrix}a_1^*\\a_2^*\\\vdots\\a_m^*\end{bmatrix},\ B^{-1}P_s=\begin{bmatrix}b_{1s}\\b_{2s}\\\vdots\\b_{ms}\end{bmatrix}.$$

计算

$$\frac{b_{r0}}{b_{rs}}=\min\left\{\frac{b_{i0}}{b_{is}}\middle|b_{is}>0,\ i=1,2,\cdots,m\right\}.$$

经(r,s)旋转变换后可得

$$\begin{aligned}\bar{B}&=(P_{j1}\cdots P_{jr-1}P_sP_{jr+1}\cdots P_{jm}),\\ \bar{B}^{-1}&=\bar{E}_{rs}B^{-1}=(\bar{b}_{ij}),\\ \bar{B}^{-1}b&=(\bar{b}_{10}\ \bar{b}_{20}\ \cdots\ \bar{b}_{m0})^{\mathrm{T}},\\ \pi&=C_B\bar{B}^{-1}=\left(-\sum_{i=1}^{m}\bar{b}_{i1}\cdots\ \sum_{i=1}^{m}\bar{b}_{im}\right).\end{aligned}$$

然后用 $\bar{\pi}$ 代替 π 继续求解子问题(2.9.8),(2.9.9)。

利用子规划的最优解来形成主规划的旋转列,这一过程称为列生成过程。一般地说,可考虑如下形式的问题。

给定一个 m 维的列向量集合 Q,以及一定义在 Q 上的实值函数 $C(P)$。要求一实值函数 $x(P)$,使得满足

$$\begin{aligned}&\sum_{P\in Q}C(P)x(P)\ \text{达到最大值},\\ &\sum_{P\in Q}x(P)P=b,\\ &x(P)\geqslant 0,\text{对所有的}\ P\in Q.\end{aligned}$$

假设已获得 Q 的 m 个向量 $P_1,P_2,\cdots,P_m$,使得

$$B=(P_1\ P_2\cdots\ P_m)$$

构成上述规划问题的一个允许基。记

$$\pi=C_BB^{-1},(\text{其中}\ C_B=(C(P_1),\cdots,C(P_m)))$$

则可得一般形式的列生成方法如下

(1) 求 $z=\min\{\pi P-C(P)\mid P\in Q\}$.

若 $z\geqslant 0$,则步骤终止,B 便是一个最优基。

若 $z<0$,则进行步骤(2)。

(2) 设 $z=\pi P_s-C(P_s)$。生成旋转列 $B^{-1}P_s$,然后利用通常的单纯形规则,确定旋转行 r。

(3) 进行(r,s)旋转变换后,可得基 $\bar{B}$, $\bar{B}^{-1}$,以及 $\bar{\pi}$,用 $\bar{B}^{-1}$, $\bar{\pi}$ 代替 B^{-1}, π,转到步骤(1)。

2.10 等高面法与拟单纯形法

考虑 R^n 中的一般线性规划问题:

$$\max\ x_0 = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, \qquad (2.10.1)$$
$$\text{s.t.}\quad \boldsymbol{Ax} \geqslant \boldsymbol{b}.$$

在(2.10.1)中，约束条件没有等式，$\boldsymbol{x}\geqslant \boldsymbol{0}$也不是单独列出，$\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，通常有 $m>n$。如果实际的线性规划问题存在 P 个线性独立的等式约束，则可用全主元消去法求解出 P 个变量，从而约束个数及问题维数都减小 P；另一个办法是将每个等式约束的右端做微小摄动，然后用两个摄动不等式代替一个等式约束，从而问题的维数不变且增加 P 个不等式约束。

问题(2.10.1)的 m 个约束形成 R^n 中的一个凸多面体 Ω^m，记

$$\boldsymbol{A}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}),\ \ i = 1, 2, \cdots, m. \qquad (2.10.2)$$

多面体 Ω^m 可以表示为

$$\Omega^m = \left\{ \boldsymbol{x}\in R^n \,\middle|\, \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x} \geqslant b_i,\ \ i = 1, 2, \cdots, m \right\}. \qquad (2.10.3)$$

先假定 Ω^m 非空并且找到一个内点 $\boldsymbol{x}^0$，亦即先假定(2.10.1)的约束相容。

Ω^m 的边界$\partial\Omega^m$ 由部分或整个超平面

$$P_i = \left\{ \boldsymbol{x}\in R^n \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ 1\leqslant i\leqslant m \right\}. \qquad (2.10.4)$$

组成。P_i 的法向量是(2.10.2)表示的 $\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}$。通过 $\boldsymbol{x}^i$ 的法向量 $\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}$ 正方向指向 Ω^m 内部。P_i 与 $\partial\Omega^m$ 的交叫做 Ω^m 的表面，表示为

$$\overline{P}_i = P_i \cap \partial\Omega^m.$$

将(2.10.1)中目标函数的 $\boldsymbol{C}$ 视为向量，定义通过 $\boldsymbol{y}$ 点的 c-线：

$$\boldsymbol{L}_y^c = \{ \boldsymbol{x}\in R^n \mid \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = t\boldsymbol{C},\ \ t\in R^1 \} \qquad (2.10.5)$$

$t>0$ 表示 $\boldsymbol{L}_y^c$ 的正方向。一个点从 $\boldsymbol{y}$ 沿着 $\boldsymbol{L}_y^c$ 正方向移动时，(2.10.1)的目标函数增大。因此，$\boldsymbol{L}_y^c$ 的正方向可视为 c-高度方向(或简称高度方向)，而超平面

$$Q_y^c = \{ \boldsymbol{x}\in R^n \mid \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = 0 \} \qquad (2.10.6)$$

可定义为 c-等高面(或简称等高面)。显然，同一等高面上的任何两点具有相同的目标函数值(即相同的高度)。

令 $l_1, l_2, \cdots, l_m$ 为 $1, 2, \cdots, m$ 的任意排列。(2.10.3)表示的凸多面体 Ω^m 的边界点可分成三类：表面点、棱点、顶点。棱点是满足

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{y} = b_i,\ \ i = l_1,\ l_2, \cdots, l_r,\ \ 1\leqslant r\leqslant n,\\
&\sum_{j=1}^{r} \alpha_j \boldsymbol{A}_{l_j}^{\mathrm{T}} \neq 0,\ \ \forall\, \alpha_1, \cdots, \alpha_r \in R^1,\ \ \sum_{j=1}^{r} \alpha_j^2 \neq 0,\\
&\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{y} > b_i,\ \ i = l_{r+1},\ \cdots,\ l_m.
\end{aligned} \qquad (2.10.7)$$

的点 $\boldsymbol{y}$。为了强调棱点的自由度，(2.10.7)定义的棱点通常称为$(n-r)$维棱点。当 $r=1$ 时，$(n-1)$维棱点是 Ω^m 表面上的一个点，叫做表面点。当 $r=n$ 时，0 维棱点是 Ω^m 的一个顶点。以后，如果维数不特别标出，一个棱点只意味着满足(2.10.7)且 $2\leqslant r\leqslant n-1$ 的点。令 $\boldsymbol{y}$ 是由(2.10.7)定义的一个$(n-r)$维棱点，形如(2.10.4)的 r 个超平面的交

$$E_y^r = \left\{ \boldsymbol{x}\in R^n \,\middle|\, \boldsymbol{A}_{l_j}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = 0,\ \ j = 1, \cdots, r \right\} \qquad (2.10.8)$$

称为 Ω^m 的$(n-r)$维棱。注意，本节定义的$(n-r)$维棱比 2.7 所说的棱含意广得多。2.7所说的棱只是(2.10.8)定义的 1 维棱，可以叫做棱线。向量

$$d_r = C - \sum_{j=1}^{r} \alpha_j A_{l_j}^{\mathrm{T}} \tag{2.10.9}$$

叫做棱(2.10.8)的梯度，其中系数 $\alpha_j(j=1,\cdots,r)$如此选择，使得

$$A_{l_i} d_r = A_{l_i} C - \sum_{j=1}^{r} \alpha_j A_{l_i} A_{l_j}^{\mathrm{T}} = 0,\ i = 1,\ \cdots,\ r. \tag{2.10.10}$$

假定从初始内点 x^0 开始，高度单调增加的内点序列 $x^0, x^1, \cdots, x^k(0\leqslant k\leqslant n-1)$已经找到，并且 k 个线性独立的表面$\bar{P}_{l_1}, \bar{P}_{l_2}, \cdots, \bar{P}_{l_k}$已被记录。等高面算法就是用下列三步骤找一个更高的内点 x^{k+1}并记录相应的表面 $\bar{P}_{l_{k+1}}$(或转向适当的出口)，从而完成一次迭代或一个迭代周期。

步骤Ⅰ 构造通过 x^k 的 d_k-线

$$L_{x^k}^{d_k} = \{x \in R^n \mid x - x^k = t d_k,\ t \in R^1\} \tag{2.10.11}$$

其中向量 d_k 当 $k=0$ 时等于 C，当 $k>0$ 时表示 $\bar{P}_{l_1}, \bar{P}_{l_2}, \cdots, \bar{P}_{l_k}$相交棱的梯度。如(2.10.5)，$t>0$ 表示(2.10.11)正方向。对 $k\geqslant 1$，$L_{x^k}^{d_k}$不与$P_{l_1}, P_{l_2}, \cdots, P_{l_k}$中的任何一个超平面及其线性相关超平面相交。

(ⅰ) $L_{x^k}^{d_k}$正方向不与$\partial\Omega^m$ 相交。显然，在这种情况下 Ω^m 非封闭且$L_{x^k}^{d_k}$正方向使目标函数值无限增大。问题(2.10.1)已经解决。转向无穷远解出口 INF。

(ⅱ) $L_{x^k}^{d_k}$正方向交$\partial\Omega^m$ 于$(n-s)$维棱点 $y^s(1\leqslant s\leqslant n)$，它是 s 个线性独立表面$\bar{P}_{g_1}, \cdots, \bar{P}_{g_s}$($s$ 通常是 1)的一个交点。

$$y_s = x^k + t_s d_k,\ \ t_s = \min_{1\leqslant j\leqslant m} \{((b_j - A_j x^k)/A_j d_k) > 0\}.$$

如果

$$C = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j A_{g_j}^{\mathrm{T}},\ \lambda_j \in R^1,\ 1 \leqslant s \leqslant n, \tag{2.10.12}$$

则按(2.10.8)及(2.10.6)，$E_y^{s_j}$位于等高面Ω_y^{s}。定理 2.28 给出判别 y^s 是否为最高$(n-s)$维棱点的充要条件。如果 y^s 为最高顶点，则得到解答。如果 y^s 为最高棱点，则 $E_y^{s_j}\cap\partial\Omega^m$ 的任何点 z 是(2.10.1)的一个解且 $C^{\mathrm{T}}z = C^{\mathrm{T}}y^s$，转向多解出口 MUL。假定(2.10.12)不成立，即 y^s 不是最高棱点。令

$$y^0 = x^k + \vartheta_1(y^s - x^k) = x^k + \vartheta_1 t_s d_k,\ 0<\vartheta_1\leqslant 1, \tag{2.10.13}$$

并记录表面 $\bar{P}_{l_{k+1}} = \bar{P}_{g_i}(1\leqslant i\leqslant s)$。转向步骤Ⅱ。

$\bar{P}_{l_{k+1}}$线性独立于 $\bar{P}_{l_1}, \bar{P}_{l_2}, \cdots, \bar{P}_{l_k}$，又由 $1<\vartheta_1\leqslant 1$ 知 $C^{\mathrm{T}}y^0 > C^{\mathrm{T}}x^k$ 且 $y^0\in\Omega^m$。

步骤Ⅱ 构造 $A_{l_{k+1}}^{\mathrm{T}}$在等高面 $Q_y^{s_0}$并通过 x^k 的投影射线：

$$J_{y^0}^{k+1} = \{x \in R^n \mid x - y^0 = t(A_{l_{k+1}}^{\mathrm{T}} - (C^{\mathrm{T}}A_{l_{k+1}}^{\mathrm{T}}/C^{\mathrm{T}}C)C),\ t>0\} \tag{2.10.14}$$

其中

$$I_{k+1} = A_{l_{k+1}}^{\mathrm{T}} - (C^{\mathrm{T}}A_{l_{k+1}}^{\mathrm{T}}/C^{\mathrm{T}}C)C$$

为 $A_{l_{k+1}}^{\mathrm{T}}$的投影方向。$J_{y^0}^{k+1}$的全部或一部分位于 Ω^m 内。

(ⅰ) $J_{y^0}^{k+1}$的一部分位于 Ω^m 内,即 $J_{y^0}^{k+1}$交$\partial\Omega^m$ 于点

$$z^0 = y^0 + t_0 I_{k+1},\ \ t_0 = \min_{1\leqslant j\leqslant m}\left\{\left(\,(b_j - A_j y^0)\big/ A_j I_{k+1}\right) > 0\right\}.$$

取

$$x^{k+1} = \vartheta_2 z^0 + (1-\vartheta_2)y^0 = y^0 + \vartheta_2 t_0 I_{k+1},\ 0\leqslant\vartheta_2<1, \qquad (2.10.15)$$

并转向步骤Ⅲ。

(ⅱ) $J_{y^0}^{k+1}$全部位于 Ω^m 内,即 $J_{y^0}^{k+1}$不交$\partial\Omega^m$ 于任何有限点。在(2.10.15)中令 $t_0=1$,计算 x^{k+1}后转向步骤Ⅲ。

注意,x^{k+1}是 Ω^m 的一个严格内点,除非(2.10.13)中 $\vartheta_1=1$ 且(2.10.15)中 $\vartheta_2=0$。显然,

$$C^{\mathrm{T}}x^{k+1} = C^{\mathrm{T}}y^0 > C^{\mathrm{T}}x^k.$$

步骤Ⅲ　考察所有记录过的表面 $\bar{P}_{l_1},\cdots,\bar{P}_{l_k},\bar{P}_{l_{k+1}}$.

(ⅰ) 若 $d_{k+1}\neq 0$,则 $k+1<n$;完成一次迭代。$k+1\Rightarrow k$, $x^{k+1}\Rightarrow x^k$,转向步骤Ⅰ。

(ⅱ) 若 $d_{k+1}=0$,则 $k+1\leqslant n$;完成一个迭代周期。超平面 $P_{l_1},\cdots,P_{l_{k+1}}$确定一个点 v_n。(在(2.10.13)中令 $\vartheta_1=1$,在(2.10.15)中令 $\vartheta_2=0$,就能在记录表面 $\bar{P}_{l_1},\cdots,\bar{P}_{l_{k+1}}$之后获得 $P_{l_1},\cdots,P_{l_{k+1}}$的一个交点 v_n。)

如果 v_n 不满足定理 2.28 的条件,则由于 $d_{k+1}=0$,

$$C = \sum_{j=1}^{q}\alpha_j A_{l_j}^{\mathrm{T}} + \sum_{j=q+1}^{k+1}\alpha_j A_{l_j}^{\mathrm{T}},$$

其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_q$全为负系数且 $1\leqslant q<k+1$。记录表面 $\bar{P}_{l_1},\bar{P}_{l_2},\cdots,\bar{P}_{l_q}$, $q\Rightarrow k$, $x^{k+1}\Rightarrow x^k$,转向步骤Ⅰ。在两个相继的迭代周期之间,被记录的表面至少有一个是不同的。

如果 v_n 满足定理 2.28 的条件,则 $C^{\mathrm{T}}v_n>C^{\mathrm{T}}x^{k+1}$。作向量 $v=v_n-x^{k+1}$,它与 C 生成一个锐角。构造类似于(2.10.11)并通过 x^{k+1}的 v-线 $L_{x^{k+1}}^{v}$。$L_{x^{k+1}}^{v}$正方向交$\partial\Omega^m$ 于 y^*。当 $y^*=v_n$ 时,y^*是一个 Ω^m 的一个最高顶点或棱点。当 $y^*\neq v_n$ 时,y^*通常是一个$(n-1)$维棱点,即 $L_{x^{k+1}}^{v}$正方向交表面 $\bar{P}_l$ 于 y^*,显然,表面 $\bar{P}_l$ 不同于$\bar{P}_{l_1},\cdots,\bar{P}_{l_{k+1}}$中的任何一个。记录 $\bar{P}_l$, $1\Rightarrow k$, $x^{k+1}\Rightarrow x^k$。转向步骤Ⅰ并进入下一个周期的迭代。两各相继的迭代周期之间,被记录的表面还是至少有一个不同。

等高面算法的收敛性是明显的。问题(2.10.1)的有界或无界解均可在有限次迭代内获得。一个迭代周期最多由 n 次迭代组成。(注意,每个迭代周期要求的迭代次数不一定相同。)

为了逐次求解(2.10.10),从而确定梯度 d_k,采用正定对称分解(LDL^{T} 分解)需要 $O(nk)$ 次算术运算。为了找出 $L_x^{d_k}$正方向与$\partial\Omega^m$ 的交点,需要 $O(mn)$次运算。通常 $m>n\geqslant k$,;因此,一次迭代需要 $O(mn)$次运算,一个迭代周期最多需要 $Q(mn^2)$次运算。

现在来考察算法中的 ϑ_1 和 ϑ_2。当 $\vartheta_1=1$ 且 $\vartheta_2=0$ 时,目标点沿不同维数的棱的梯度方向单调上升,通常是分周期依次沿着$(n-r)$维,$(n-r-1)$维,$\cdots$,1 维棱单调上升到最高顶点,其中第一周期 $r=1$,以后的周期 $n>r>1$。这本质上就是单纯形法,因为目标始终在边界$\partial\Omega^m$上单调上爬。但它与典型的单纯法或改进单纯形法又有区别。由 2.7 节知道,典型的单

纯形法始终是由一个顶点沿着棱线(1维棱)单调上升到一个相邻顶点。因此 $\vartheta_1=1$ 且 $\vartheta_2=0$ 的等高面法可称之为拟单纯形法。由于单纯形法与拟单纯形法都是使目标点在边界 $\partial\Omega^m$ 上移动,所以它们都不可避免地可能因舍入误差积累的影响而使计算出来的目标点跑出 Ω^m 之外,产生危险的后果。

$\vartheta_1\neq 1$ 或 $\vartheta_2\neq 0$ 的等高面法是内点法。目标点始终在 Ω^m 内部沿折线移动,又由于求梯度 $\boldsymbol{d}_r$ 的线性方程组(2.10.10)的系数矩阵是对称正定的,数值稳定性好,所以内点等高面法是一个可能取代单纯形法的好算法。当 $0<\vartheta_1<1$ 且 $\vartheta_2=0$ 时,等高面法仍然使目标点在 Ω^m 内部沿着一条折线单调上升,还省去投影射线的计算工作量。

等高面算法的理论基础是下述四条定理。

定理 2.26 令 $\boldsymbol{y}$ 满足(2.10.7)的棱点且 $r<n$。假定

$$\boldsymbol{C}\neq\sum_{j=1}^{r}\lambda_j\boldsymbol{A}_{l_j}^{\mathrm{T}},\ \lambda_j\in R^1,\ j=1,\ \cdots,\ r. \tag{2.10.16}$$

则由(2.10.9)和(2.10.10)定义的梯度 $\boldsymbol{d}_r$ 不等于零,并且线 $\boldsymbol{y}+t\boldsymbol{d}_r(t\in R^1)$ 位于棱(2.10.8)。还有

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_r>0,$$

$\boldsymbol{d}_r$ 是棱 E_y^r 中与 $\boldsymbol{C}$ 生成最小锐角的向量。

证明: 在定理的假设条件(2.10.16)下,式(2.10.9)惟一确定 $\boldsymbol{d}_r\neq\boldsymbol{0}$,并且

$$\boldsymbol{y}+t\boldsymbol{d}_r\subset E_y^r\quad \forall\, t\in R^1.$$

因为(2.10.10)的解是

$$\boldsymbol{\alpha}^{(r)}=\boldsymbol{B}_r^{-1}\boldsymbol{g}^{(r)}, \tag{2.10.17}$$

其中

$$\boldsymbol{\alpha}^{(r)}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_r\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}_r=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{l_1}\boldsymbol{A}_{l_1}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{l_1}\boldsymbol{A}_{l_r}^{\mathrm{T}}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{l_r}\boldsymbol{A}_{l_1}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{l_r}\boldsymbol{A}_{l_r}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{l_1}\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_{l_r}\end{pmatrix}(\boldsymbol{A}_{l_1}^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{A}_{l_r}^{\mathrm{T}}),\ \boldsymbol{g}(r)=\begin{pmatrix}A_{l_1}C\\ \vdots\\ A_{l_r}C\end{pmatrix} \tag{2.10.18}$$

(2.10.18)中矩阵 $\boldsymbol{B}_r$ 显然是对称正定的。由(2.10.9)及(2.10.17),(2.10.18)知

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_r=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}-\boldsymbol{g}^{(r)T}\boldsymbol{B}_r^{-1}\boldsymbol{g}^{(r)}.$$

矩阵

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_r & \boldsymbol{g}^{(r)}\\ \boldsymbol{g}^{(r)T} & \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{l_1}\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_{l_r}\\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(\boldsymbol{A}_{l_1}^{\mathrm{T}}\cdots\ \boldsymbol{A}_{l_r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C})$$

因(2.10.16)而对称正定,其逆矩阵

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_r & \boldsymbol{g}^{(r)}\\ \boldsymbol{g}^{(r)T} & \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_r^{-1}+\dfrac{\boldsymbol{B}_r^{-1}\boldsymbol{g}^{(r)}(\boldsymbol{B}_r^{-1}\boldsymbol{g}^{(r)})^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_r} & -\dfrac{\boldsymbol{B}_r^{-1}\boldsymbol{g}^{(r)}}{\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_r}\\ -\dfrac{(\boldsymbol{B}_r^{-1}\boldsymbol{g}^{(r)})^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_r} & \dfrac{1}{\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_r}\end{pmatrix}$$

也对称正定。于是最后一个对角线元素的倒数大于零，即

$$C^{\mathrm{T}}d_r>0.$$

如果将坐标原点平移到 y，则流形

$$E_y^r \cap Q_y^c \tag{2.10.19}$$

是 E_y^r 的 $(n-r-1)$ 维子空间。由(2.10.9)，(2.10.8)，(2.10.6)知梯度 d_r 正交于这个子空间。

考虑 E_y^r 中任意单位向量 d^*。由于 d_r 正交于子空间(2.10.19)，故有

$$d^*=d'+d'',$$

其中

$$d''\in E_y^r\cap Q_y^c,\ d'=\beta\frac{d_r}{\|d_r\|_2},\ |\beta|\leqslant 1,\ \|d_r\|_2=(d_r^{\mathrm{T}}d_r)^{1/2}$$

又由于 $C^{\mathrm{T}}d''=0$，故

$$\cos\angle(C,\ d^*)=\frac{C^{\mathrm{T}}}{\|C\|_2}d^*=\beta\frac{C^{\mathrm{T}}d_r}{\|C\|_2\|d_r\|_2}$$

不大于

$$\cos\angle(C,\ d_r)=\frac{C^{\mathrm{T}}}{\|C\|_2}\cdot\frac{d_r}{\|d_r\|_2},$$

即 d_r 在 E_y^r 中与 C 生成最小锐角。证毕。

定理 2.27　令 y 是 Ω^m 的位于边界面 P_g 的一个表面点。假定

$$A_g^{\mathrm{T}}\neq tC\quad \forall t\in R^1 \tag{2.10.20}$$

则由(2.10.14)定义的投影射线 J_y^g 位于等高面 Q_y^c，J_y^g 与 Ω^m 的交是除端点外全属于 Ω^m 内部的线段或射线。

证明：　设 x 是 J_y^g 上任意一点，$x\neq y$，则由(2.10.14)知

$$x-y=\lambda I_g=\lambda(A_g^{\mathrm{T}}-(C^{\mathrm{T}}A_g^{\mathrm{T}}/C^{\mathrm{T}}C)C),\ t>0,$$
$$C^{\mathrm{T}}(x-y)=\lambda(C^{\mathrm{T}}A_g^{\mathrm{T}}-C^{\mathrm{T}}A_g^{\mathrm{T}})=0.$$

于是由定义(2.10.6)立刻得知 $J_y^g\in Q_y^C$。又由假定条件(2.10.20)得

$$A_g(x-y)=\lambda(A_gA_g^{\mathrm{T}}-(A_gC)^2/C^{\mathrm{T}}C)$$
$$=\frac{\lambda}{C^{\mathrm{T}}C}((A_gA_g^{\mathrm{T}})(C^{\mathrm{T}}C)-(A_gC)^2)>0,\ (\lambda>0)$$
$$A_gx>A_gy=b_g.$$

故 $\lambda>0$ 充分小时，x 在 Ω^m 内部。再由 Ω^m 为凸集得知 $J_y^g\cap\Omega^m$ 除端点外属于 Ω^m 内部。证毕。

定理 2.28　令 y 是满足(2.10.7)的 $(n-r)$ 维棱点。假定

$$C=\sum_{j=1}^{r}\lambda_jA_{i_j}^{\mathrm{T}},\ \lambda_j\in R^1,\ j=1,\ \cdots,\ r,\ 1\leqslant r\leqslant n, \tag{2.10.21}$$

且 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 中至少有一个负数。则 y 是 c-方向最高棱点 $(r<n)$ 或顶点 $(r=n)$ 的充要条件是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 中没有正数。

证明：　首先由定理假定条件(2.10.21)知 $E_y^r\subset Q_y^c$.

考虑 $A_{l_1}^{T}$, $A_{l_2}^{T}$, $\cdots$, $A_{l_r}^{T}$在 Q_y^c 上的投影向量

$$I_{l_j}=A_{l_j}^{T}-\frac{C^{T}A_{l_j}^{T}}{C^{T}C}C,\ j=1,2,\cdots,r,\ 1\leqslant r\leqslant n.$$

r 个投影向量$I_{l_1}, I_{l_2}\cdots, I_{l_r}$是线性相关的,因为(2.10.21)蕴含

$$\sum_{j=1}^{r}\lambda_j I_{l_j}=\left(1-\left(C^{T}\sum_{j=1}^{r}\lambda_j A_{l_j}^{T}\right)/C^{T}C\right)C=0. \tag{2.10.22}$$

不失一般性,设定 $\lambda_1<0$。于是(2.10.22)被改写成

$$I_{l_1}=-\sum_{j=2}^{r}\frac{\lambda_j}{\lambda_1}I_{l_j} \tag{2.10.23}$$

(2.10.23)右端的向量是线性独立的,事实上,若有实数 $\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 使

$$\sum_{j=2}^{r}\alpha_j I_{l_j}=0,\ \left(\sum_{j=2}^{r}\alpha_j^2\neq 0\right),$$

则由(2.10.21)有

$$\sum_{j=2}^{r}\alpha_j A_{l_j}^{T}-\sum_{i=2}^{r}\alpha_i\frac{C^{T}A_{l_i}^{T}}{C^{T}C}\sum_{j=1}^{r}\lambda_j A_{l_j}^{T}=0,$$

即 $A_{l_1}^{T}, A_{l_2}^{T},\cdots, A_{l_r}^{T}$线性相关。这与棱点的定义(2.10.7)矛盾。

令 $I=x-y$ 为超平面 Q_y^c 内的任意向量。由于 $I_{l_2},\cdots,I_{l_r}$是$(n-1)$维超平面 Q_y^c 内的 $r-1$ 个线性独立的向量,因此存在实数 $\beta_2,\cdots,\beta_r$ 使得

$$I=\sum_{j=2}^{r}\beta_j I_{l_j}+\sum_{i=1}^{n-r}\beta_{r+i}I_{r+i}, \tag{2.10.24}$$

其中 $I_{r+1},\cdots,I_n$ 是棱 $E_y^r\subset Q_y^c$ 中的线性独立向量。容易验证,当且仅当

$$I_{l_j}^{T}I>0,\ j=1,2,\cdots,r, \tag{2.10.25}$$

时,向量 I 位于$P_{l_1},P_{l_2},\cdots,P_{l_r}$之内。事实上,由 I 和I_{l_j}的定义知条件(2.10.25)等价于

$$I_{l_j}^{T}I=A_{l_j}(x-y)=A_{l_j}x-b_{l_j}>0,\ j=1,2,\cdots,r.$$

将(2.10.24)代入(2.10.25)并注意到 E_y^r正交于$I_{l_1},I_{l_2},\cdots,I_{l_r}$,得

$$G\beta>0, \tag{2.10.26}$$

其中

$$G=(I_{l_i}^{T}I_{l_j}),\ i,\ j=2,\ \cdots,\ r,\ \beta=(\beta_2,\ \cdots,\ \beta_r)^{T},$$

和

$$I_{l_1}^{T}\sum_{j=2}^{r}\beta_j I_{l_j}>0. \tag{2.10.27}$$

利用 I_{l_1}的表示式(2.10.23),可以把(2.10.27)改写成

$$-\mu^{T}G\beta>0 \tag{2.10.28}$$

其中

$$\mu=\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1},\ \cdots,\ \frac{\lambda_r}{\lambda_1}\right)^{T}.$$

如果(2.10.21)中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 没有正数,则 $\mu\geqslant 0$使(2.10.26)与(2.10.28)互相矛盾,这

就证明了定理的充分条件。

如果(2.10.21)中至少有一个正系数，比方说 $\lambda_2>0$，则 $\boldsymbol{\mu}$ 的第一个分量小于 0，$\lambda_2/\lambda_1<0$。由于 $\boldsymbol{I}_{l_2},\cdots,\boldsymbol{I}_{l_r}$ 线性独立，故(2.10.26)的系数矩阵 $\boldsymbol{G}$ 非奇异。于是存在惟一的 $\boldsymbol{\beta}$ 使(2.10.26)成立，即

$$\boldsymbol{G\beta}=(T,\ \varepsilon,\ \cdots,\ \varepsilon)^{\mathrm{T}}>\boldsymbol{0}.$$

令 ε 充分小而 T 充分大。则由于 $\lambda_2/\lambda_1<0$ 得

$$-\boldsymbol{\mu G\beta}=-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}T-\varepsilon\sum_{j=2}^{r}\frac{\lambda_j}{\lambda_1}>0,$$

即(2.10.28)也成立。这就证明了定理的必要条件。证毕。

定理 2.29　令 $\boldsymbol{d}_r$ 为(2.10.9)和(2.10.10)定义的棱(2.10.8)的梯度，$1\leqslant r\leqslant n$，$\boldsymbol{x}^k$ 为 Ω^m 的一个内点。从形成棱(2.10.8)的超平面 $P_{l_1},\ P_{l_2},\ \cdots,\ P_{l_r}$ 中去掉一个超平面 P_{l_i}，余下的超平面形成 $(n-r+1)$ 维棱

$$E_y^{r-1}=\{\boldsymbol{x}\in R^n\mid \boldsymbol{A}_{l_j}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=0,\ j=1,\cdots,i-1,\ i+1,\ \cdots,\ 1\leqslant r\leqslant n,\ 1\leqslant i\leqslant r\}$$

(2.10.29)

(2.10.29)的梯度用 $\boldsymbol{d}_{r-1}$ 表示。令 $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}^k}^{\boldsymbol{d}_{r-1}}$ 是形如(2.10.11)的 $\boldsymbol{d}_{r-1}$-线。有：$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}^k}^{\boldsymbol{d}_{r-1}}$ 正方向与 P_{l_i} 相交的充分必要条件是(2.10.9)中 $\alpha_i<0$。

证明：按定理的条件，棱(2.10.29)的梯度

$$\boldsymbol{d}_{r-1}=\boldsymbol{C}-\sum_{j=1}^{i-1}\beta_j\boldsymbol{A}_{l_j}^{\mathrm{T}}-\sum_{j=i+1}^{r}\beta_j\boldsymbol{A}_{l_j}^{\mathrm{T}},\tag{2.10.30}$$

其中系数 $\beta_1,\ \cdots,\ \beta_{i-1},\ \beta_{i+1},\ \cdots,\ \beta_r$ 用

$$\boldsymbol{A}_{l_s}\boldsymbol{d}_{r-1}=\boldsymbol{A}_{l_s}\boldsymbol{C}-\sum_{j=1}^{i-1}\beta_j\boldsymbol{A}_{l_s}\boldsymbol{A}_{l_j}^{\mathrm{T}}-\sum_{j=i+1}^{r}\beta_j\boldsymbol{A}_{l_s}\boldsymbol{A}_{l_j}^{\mathrm{T}}=0,\ s=1,\ \cdots,\ i-1,\ i+1,\ \cdots,\ r$$

(2.10.31)

确定。类似于定理 2.26 的证明，(2.10.31)有惟一解

$$\boldsymbol{\beta}^{(r-1)}=\boldsymbol{B}_{r-1}^{-1}\boldsymbol{g}^{(r-1)},$$

其中

$$\boldsymbol{\beta}^{(r-1)}=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_{i-1}\\ \beta_{i+1}\\ \vdots\\ \beta_r\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}_{r-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{l_1}\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_{l_{i-1}}\\ \boldsymbol{A}_{l_{i+1}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_{l_r}\end{pmatrix}(\boldsymbol{A}_{l_1}^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{A}_{l_{i-1}}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{A}_{l_{i+1}}^{\mathrm{T}}\cdots\ \boldsymbol{A}_{l_r}^{\mathrm{T}}),\ \boldsymbol{g}^{(r-1)}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{l_1}\boldsymbol{C}\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_{l_{i-1}}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{A}_{l_{i+1}}\boldsymbol{C}\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_{l_r}\boldsymbol{C}\end{pmatrix}$$

假设 $L_{\boldsymbol{x}^k}^{d_{r-1}}$ 正方向与 P_l 相交。由 $P_{l_1},\ \cdots,\ P_{l_{i-1}},\ P_{l_{i+1}},\ \cdots,\ P_{l_r},\ P_l$ 组成的 $(n-r)$ 维棱有梯度

$$\boldsymbol{d}_r^*=\boldsymbol{C}-\sum_{j=1}^{i-1}\beta_j^*\boldsymbol{A}_{l_j}^{\mathrm{T}}-\sum_{j=i+1}^{r}\beta_j^*\boldsymbol{A}_{l_j}^{\mathrm{T}}-\beta\boldsymbol{A}_l^{\mathrm{T}},$$

其中系数

$$\beta=\frac{-\boldsymbol{\alpha}_{r-1}^{T}\boldsymbol{B}_{r-1}^{-1}\boldsymbol{g}^{(r-1)}}{\boldsymbol{A}_l\boldsymbol{A}_l^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\alpha}_{r-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{r-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_{r-1}}+\frac{\boldsymbol{A}_l\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{A}_l\boldsymbol{A}_l^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\alpha}_{r-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{r-1}^{-1}\alpha_{r-1}}=\frac{\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_l^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\alpha}_{r-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}^{(r-1)}}{\boldsymbol{A}_l\boldsymbol{A}_l^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\alpha}_{r-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{r-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_{r-1}},\quad(2.10.32)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{r-1}=(\boldsymbol{A}_l\boldsymbol{A}_{l_1}^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{A}_l\boldsymbol{A}_{l_{i-1}}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{A}_l\boldsymbol{A}_{l_{i+1}}^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{A}_l\boldsymbol{A}_{l_r}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}.$$

β 的分母大于零,

$$\boldsymbol{A}_l\boldsymbol{A}_l^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\alpha}_{r-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{r-1}^{-1}\alpha_{r-1}>0.$$

由于 $\boldsymbol{L}_{x^*}^{d_{r-1}}$正方向与 P_l 相交,有

$$\boldsymbol{A}_l\boldsymbol{d}_{r-1}<0\quad(2.10.33)$$

(2.10.33)和(2.10.30)导致 β 的分子小于零,

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_l^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\alpha}_{r-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}^{(r-1)}<0.$$

因此 $\beta<0$。

若 $P_l=P_{l_i}$,则 $\boldsymbol{d}_r^*=\boldsymbol{d}_r$,且 $\alpha_i=\beta$,即仅当(2.10.9)中 $\alpha_i<0$ 时,$\boldsymbol{L}_{x^*}^{d_{r-1}}$正方向才与 P_{l_i}相交。另一方面,若(2.10.9)中 $\alpha_i<0$,则在(2.10.32)中置 $\boldsymbol{A}_l=\boldsymbol{A}_{l_i}$,即知 $\boldsymbol{L}_{x^*}^{d_{r-1}}$正方向与 P_{l_i}相交。证毕。

最后来确定初始内点 $\boldsymbol{x}^0$,同时也解决(2.10.1)约束的相容性问题,即求解线性不等式组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{b}\quad(2.10.34)$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{x}\in R^n$, $\boldsymbol{b}\in R^m$。

引进一个变量,就可以将(2.10.34)转换为本节线性规划的标准形式。事实上,令 $\boldsymbol{x}^r$ 为 R^n 中的任意一点,则问题

$$\begin{aligned}&\max z=-\xi,\\&\text{s.t. } \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^r+\lambda\boldsymbol{e}_m)\xi\geqslant\boldsymbol{b},\ \xi\geqslant0\end{aligned}\quad(2.10.35)$$

显然是 R^{n+1}中的标准线性规划,其中变量是$(n+1)$维向量$(x_1,x_2,\cdots,x_n,\xi)^{\mathrm{T}}$,而

$$\boldsymbol{e}_m=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}},$$

$$\lambda=\max\Big(0,\ \max_{1\leqslant i\leqslant m}\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j^r-b_i\Big)\Big)+\vartheta_3,\ \vartheta_3>0.\quad(2.10.36)$$

若(2.10.34)有解 $\boldsymbol{x}^0$,则$(\boldsymbol{x}^{0T},\ 0)^{\mathrm{T}}$ 显然是(2.10.35)的解。反之,若(2.10.35)有解$(\boldsymbol{x}^{0T},\ 0)^{\mathrm{T}}$,则 $\boldsymbol{x}^0$ 是(2.10.34)的解。如果(2.10.35)有解$(\boldsymbol{x}^{0T},\ \xi_0)^{\mathrm{T}}$, $\xi_0>0$,则(2.10.34)是不相容的。事实上,(2.10.36)导致

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^r+\lambda\boldsymbol{e}_m>0,$$

由此及 $\xi_0>0$,知(2.10.34)为不相容系统。

易知(2.10.35)的约束形成 R^{n+1}中的凸多面体 Ω^{m+1},且由(2.10.36)知

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \xi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}^r\\ 1\end{pmatrix}$$

为 Ω^{m+1}的一个严格内点,因此可用等高面法求解(2.10.35)。

另一个确定初始内点 $\boldsymbol{x}^0$ 的办法是逐次应用等高面法求解(2.10.34)。

首先,(2.10.34)的第一个不等式

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}\geqslant b_1,\ n\geqslant2,\ \boldsymbol{A}_1\neq0,$$

有无数个内点,令${}^1x$ 为其中一个。现在假定已找到(2.10.34)的前 k 个不等式围成的多面体 Ω^k 的一个内点${}^kx$,试求解下述线性规划问题:

$$\begin{aligned}&\max\ z = A_{k+1}x,\\&\text{s.t.}\ \ A_1x\geqslant b_1,\ A_2x\geqslant b_2,\ \cdots,\ A_kx\geqslant b_k.\end{aligned}\tag{2.10.37}$$

如果 $\max A_{k+1}x > b_{k+1}$,则(2.10.34)的前 $k+1$ 个不等式相容,可以找到 Ω^{k+1}的一个内点;如果 $\max A_{k+1}x < b_{k+1}$,则第 $k+1$ 个不等式与前 k 个不等式不相容;如果 $\max A_{k+1}x = b_{k+1}$,则第 $k+1$ 个不等式实际上只可能有等式成立,(2.10.34)是退化的。这样,最多求解 $m-1$ 次线性规划问题(2.10.37),就可以找到 Ω^m 的一个内点或断言(2.10.34)不相容或退化。

有了 Ω^k 的内点${}^kx$,就可以用等高面法求解(2.10.37)。

习 题

1. 设 $B_1=(P_1P_2\cdots P_m)$, $B_2=(P_{j_1}P_{j_2}\cdots P_{j_m})$是线性规划问题的任意两个基。证明存在$\{1,2,\cdots,m\}$的一个排列 $i_1i_2\cdots i_m$,使得对任意的 $k(1\leqslant k\leqslant m)$, $(P_{j_1}\cdots P_{j_{k-1}}P_{i_k}P_{j_{k+1}}\cdots P_{j_m})$是线性规划问题的一个基。

2. 在单纯形计算程序中,若在某一步,x_n 被取作了旋入变量,证明在此后的旋转变换过程中,x_n 恒为基变量。

3. 在单纯形计算程序中,证明以 j 列为旋转列的次数最多为 2^{n-j}(其中的 n 是变量的数目)。

4. 设 $x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm T}$ 是任意的一个基本解,证明:

$$|x_j|\leqslant m!\ \ \alpha^{m-1}\beta.$$

其中的

$$\alpha=\max\left\{\,|a_{ij}|\ \|\ i=1,\cdots,m;\ j=1,\ \cdots,n\right\},$$

$$\beta=\max\left\{\,|b_i|\ \|\ i=1,\ \cdots,\ m\right\}$$

5. 设 x^* 是多面体

$$\{x\,|\,Ax=b,\ x\geqslant 0\}$$

的任意一个顶点。证明存在某整数向量

$$C=(c_1,\cdots,c_n),$$

使得 x^* 是线性规划问题 $\max\{Cx\,|\,Ax=b,\ x\geqslant 0\}$ 的惟一的最优解。

6. 将单纯形算法中的旋转列 s 和 r 旋转行的选取规则改成如下形式

$$b_{0s}=\min\left\{\,b_{0j}\,|\,1\leqslant j\leqslant n\right\}<0,$$

$$\theta=\min\left\{\frac{b_{i0}}{b_{is}}\,\middle|\,1\leqslant i\leqslant m,\ b_{is}>0\right\},$$

$$r=\min\left\{\,i\,\middle|\,\frac{b_{i0}}{b_{is}}=\theta,\ b_{is}>0\right\}.$$

然后,计算下述线性规划问题

$$\max x_0=3+\frac{3}{4}x_1-20x_2+\frac{1}{2}x_3-6x_4,$$

满足条件

$$\frac{1}{4}x_1-8x_2-x_3+9x_4\leqslant 0,$$

$$\frac{1}{2}x_1-12x_2-\frac{1}{2}x_3+3x_4\leqslant 0,$$

$$x_3\leqslant 1,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0.$$

求进行 6 次旋转变换后的单纯形表(以松弛变量为初始允许基的基变量)。

7. 设 x^0 是任给的一个允许解，记

$$J^0 = \{j \mid x_j^0 > 0\}.$$

如何从 x^0 出发，求得这样一个基本允许解 x^*，使得 $Cx^* \geqslant Cx^0, J^* \subseteq J^0$，其中

$$J^* = \{j \mid x_j^* > 0\}.$$

8. 求证：当 $n = m + 1$ 时，最多有两个基本允许解。

9. 考虑分式规划问题

$$\max\ x_0 = \frac{cx + c_0}{dx + d_0},$$

满足条件

$$Ax = b,\ x \geqslant 0,$$

其中的 $d \geqslant 0$, $d_0 > 0$。求证：若问题有最优解，则必有基本的最优解。

10. 将下述问题

$$\min \sum_{j=1}^{m} \left| b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right|$$

化为等价的线性规划问题。

11. 将下述问题

$$\min \sum_{j=1}^{n} | x_j |,$$

满足条件

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i,\ i = 1, 2, \cdots, m$$

化为等价的线性规划问题。

12. 利用字典序单纯形算法，计算线性规划问题：

$$\max\ x_0 = \sum_{j=1}^{n} 10^{n-j} x_j,$$

满足条件

$$2\sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} x_j + x_i + x_{n+i} = 100^{i-1},\ i = 1, \cdots, n,$$
$$x_j \geqslant 0,\ j = 1, \cdots, 2n.$$

假如初始的基本允许解取为

$$x_{n+i} = 100^{i-1},\ x_i = 0,\ i = 1, \cdots, n,$$

试用数学归纳法证明：

(ⅰ)经过 $2^{n-1} - 1$ 次旋转变换后，目标函数的表达式变为

$$x_0 = 10\left(100^{n-2} - \sum_{j=1}^{n-2} 10^{n-1-j} x_j - x_{2n-1}\right) + x_n.$$

(ⅱ)经过 2^{n-1} 次旋转变换后，目标函数的表达式变为

$$x_0 = 90 \times 100^{n-2} + 10\left(\sum_{j=1}^{n-2} 10^{n-1-j} x_j + x_{2n-1}\right) - x_{2n}.$$

(ⅲ)经过 $2^n - 1$ 次旋转变换后，目标函数的表达式变为

$$x_0 = 100^{n-1} - \sum_{j=1}^{n-1} 10^{n-j} x_j - x_{2n}.$$

13. 用等高面法求解 Hilbert 矩阵形成的坏条件线性方程组：

$$Ax = b, a_{ij} = 1/(i + j),\ b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij},\ n = 40.$$

该线性方程组用摄动不等式组

$$b - 10^{-8}(1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}} \leqslant Ax \leqslant b + 10^{-8}(1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}}$$

代替。

14. 用等高面法求解 Klee-Minty 单纯形反例：

$$\max x_0 = \sum_{j=1}^{n} 10^{n-j} x_j,\ n = 8,$$

$$\text{s.t.} \left(2 \sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} x_j\right) + x_i \leqslant 100^{i-1},\ i = 1, 2, \cdots, n,$$

$$x_j > 0,\ j = 1, 2, \cdots, n, n = 8.$$

约束多面体的初始内点可取为 $x^0 = (0.1,\ 0.1,\ \cdots,\ 0.1)^{\mathrm{T}}$。

3 割平面法

3.1 线性整数规划基本概念和性质

线性整数规划问题的标准形式为

求
$$\max x_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + c_0, \tag{3.1.1}$$
满足条件
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i,\ i = 1, \cdots, m, \tag{3.1.2}$$
$$x_j \geqslant 0,\ j = 0, 1, \cdots, n, \tag{3.1.3}$$
$$x_j\ \text{取整数值},\ j = 0, 1, \cdots, n, \tag{3.1.4}$$
其中的 c_j, a_{ij}, b_i 都是已知的整数, c_0 是足够大的一个正整数。利用 2.1 中的向量和矩阵的符号,问题可写成如下的形式

求
$$\max x_0 = \boldsymbol{Cx} + c_0,$$
满足条件
$$\boldsymbol{Ax} \leqslant \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x}\ \text{为整数向量}.$$
作为引言,先介绍一个代数中的基本定理,它与整数规划问题密切相关。

定理 3.1 假设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$ 中的分量都是整数。$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有整数解 $\boldsymbol{x}$ 的充要条件是:对任意使 $\boldsymbol{uA}$ 为整数向量的 $\boldsymbol{u} = (u_1, \cdots, u_m)$,必使 $\boldsymbol{ub}$ 是整数。

证明:必要性是显然的。下面证明充分性。设 $m \leqslant n$,且
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_i \\ \vdots \\ \varepsilon_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & & & \\ & \ddots & & \boldsymbol{0} & & \\ & & \varepsilon_i & & & \boldsymbol{0} \\ & \boldsymbol{0} & & \ddots & & \\ & & & & \varepsilon_m & \end{pmatrix}$$
是 $\boldsymbol{A}$ 的 Smith 标准型,即有 $m \times m$ 的整数矩阵 $\boldsymbol{L}$ 和 $n \times n$ 的整数矩阵 $\boldsymbol{U}$, $|\boldsymbol{L}| = |\boldsymbol{U}| = 1$,使得 $\boldsymbol{LAU} = \boldsymbol{\varepsilon}$。其中 ε_i 表示 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的第 i 行, ε_i 都是整数,且 $\varepsilon_i | \varepsilon_{i+1}$, $i = 1, \cdots, m-1$。这里的符号 $\alpha | \beta$ 表示 β 能被 α 整除, $\alpha \nmid \beta$ 表示 β 不能被 α 整除。因为
$$|\boldsymbol{L}| = |\boldsymbol{U}| = 1$$
$\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{U}$ 都是整数矩阵,故 $\boldsymbol{L}^{-1}$和 $\boldsymbol{U}^{-1}$也都是整数矩阵,且有关系
$$\boldsymbol{LA} = \boldsymbol{\varepsilon U}^{-1},\ \boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon U}^{-1}.$$
因此
$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}\quad \text{有整数解}\ \boldsymbol{x} \Leftrightarrow$$
$$\boldsymbol{\varepsilon U}^{-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Lb}\quad \text{有整数解}\ \boldsymbol{x}.$$

作线性变换

$$U^{-1}x = y,$$

则整数向量 x 与整数向量 y 之间建立了一一对应。因此

$$Ax = b \quad 有整数解\ x \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon y = Lb \quad 有整数解\ y.$$

设

$$L = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix},$$

则

$$Ax = b \quad 有整数解\ x \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon_i \mid L_i b, \quad i = 1, \cdots, m.$$

现在,用反证法。假设定理的条件成立,但是 $Ax = b$ 无整数解。则存在某 i,使得

$$\varepsilon_i \nmid L_i b$$

取 $u = \frac{1}{\varepsilon_i} L_i$,

则 $ub = \frac{1}{\varepsilon_i} L_i b$ 不是整数,但是

$$uA = \frac{1}{\varepsilon_i} L_i A = \frac{1}{\varepsilon_i} \varepsilon_i U^{-1} = U_i^{-1}$$

是整数向量,其中 U_i^{-1} 的表示 U^{-1}的第 i 行。这就是与定理的假设相矛盾。证毕。

下面介绍一些常用的符号。

$\lfloor \lambda \rfloor$表示不超过 λ 的最大整数。

$\lceil \lambda \rceil$表示不小于 λ 的最小整数。

$R^n = \{x \mid x = (x_1, \cdots, x_n)^T$, 所有 x_j 取有理数$\}$.

$Z^n = \{x \mid x \in R^n$, 所有 x_j 取整数$\}$.

$R_+^n = \{x \mid x \in R^n,\ x \geqslant 0\}$.

$Z_+^n = \{x \mid x \in Z^n,\ x \geqslant 0\}$.

$P = \{x \mid x \in R_+^n,\ Ax \leqslant b\}$.

$S = \{x \mid x \in Z_+^n,\ Ax \leqslant b\}$.

$\mathbf{1} = (1, \cdots, 1)^T$.

$B^n = \{x \mid x \in Z_+^n,\ x \leqslant \mathbf{1}\}$.

则线性整数规划问题也可写为

$$\max \{x_0 \mid x_0 = Cx + c_0,\ x \in S\}$$

当 S 含有无穷多个点时,定义 S 的凸包如下:

$$(S)^{\Delta} = \left\{x \mid x = \sum_{y \in Y} \alpha(y) y,\ \sum_{y \in Y} \alpha(y) = 1,\ \alpha(y) \geqslant 0,\ Y \subseteq S,\ |Y|\ 有限\right\}.$$

通常称其为整点凸包。

定理 3.2 当 S 含有无穷多个点时,存在有限个非负的整数向量

$$\boldsymbol{z}^1,\cdots,\boldsymbol{z}^h;\ \boldsymbol{y}^1,\ \cdots,\ \boldsymbol{y}^t,$$

满足

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}^i\leqslant \boldsymbol{b},\ i=1,\cdots,h,$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}^j\leqslant \boldsymbol{0},\ j=1,\cdots,t,$$

使得

$$(S)^{\Delta}=\left\{x \mid x=\sum_{i=1}^{h}a_j z^i+\sum_{j=1}^{t}\beta_j y^j,\ \sum_{i=1}^{h}a_i=1,\ \text{所有的 } a_i,\ \beta_j\geqslant 0\right\}$$

证明:设无界多面体 P 的顶点集合为 $\{x^1,\cdots,x^r\}$,极射向集合为 $\{y^1,\cdots,y^t\}$。因为极射向的任何正数倍仍是极射向,故不妨设所有的 y^j 都是非负整数向量。根据允许解的一般表示定理 2.10,可得

$$P=\left\{x \mid x=\sum_{k=1}^{r}\lambda_k x^k+\sum_{j=1}^{t}\mu_j y^j,\ \sum_{k=1}^{r}\lambda_k=1,\ \text{所有的 } \lambda_k,\ \mu_j\geqslant 0\right\}$$

让

$$Q=\left\{x \mid x\in Z_+^n,\ x=\sum_{k=1}^{r}\lambda_k x^k+\sum_{j=1}^{t}\mu_j y^j,\ \sum_{k=1}^{r}\lambda_k=1,\ \lambda_k\geqslant 0,\ (1\leqslant k\leqslant r),\right.$$
$$\left.0\leqslant\mu_j<1,\ (1\leqslant j\leqslant t)\right\},$$

则 Q 是 S 的一个有限的子集。设

$$Q=\{z^1,\ \cdots,\ z^h\},$$

则对任意的 $x\in S\subseteq P$,必可表示为

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=1}^{r}\lambda_k x^k+\sum_{j=1}^{t}\mu_j y^j \\ &= \sum_{k=1}^{r}\lambda_k x^k+\sum_{j=1}^{t}(\mu_j-\lfloor\mu_j\rfloor)y^j+\sum_{j=1}^{t}\lfloor\mu_j\rfloor y^j \\ &= z^i+\sum_{j=1}^{t}\lfloor\mu_j\rfloor y^j, \end{aligned}$$

其中的 z^i 为 Q 中的某个向量。因此就可推得

$$(S)^{\Delta}=\left\{x \mid x=\sum_{i=1}^{h}a_i z^j+\sum_{j=1}^{t}\beta_j y^j,\ \sum_{i=1}^{h}a_i=1,\ \text{所有的 } a_i,\ \beta_j\geqslant 0\right\}.$$

证毕。

定理 3.2 说明,即使 S 含有无穷多个点,$(S)^{\Delta}$也是一个凸多面体,因此,它也可以被定义成不等式组的形式:

$$(S)^{\Delta}=\{x \mid Ax\leqslant b,\ \pi^i x\leqslant\pi_0^i,\ i=1,\cdots,S,\ x\geqslant 0\}.$$

因为 $S\subset(S)^{\Delta}$, $(S)^{\Delta}$的顶点必定属于 S,而线性规划问题的最优解必可在顶点达到,故

$$\max\{x_0 \mid x_0=Cx+c_0,\ x\in(S)^{\Delta}\}$$
$$=\max\{x_0 \mid x_0=Cx+c_0,\ x\in S\}.$$

假如能写出所有的条件:

$$\pi^i x\leqslant\pi_0^i,\ i=1,\cdots,s,$$

那么,整数规划问题就完全化为等价的线性规划问题。因此,如何从条件 $Ax\leqslant b$ 导出条件 $\pi^i x\leqslant\pi_0^i$,就是线性整数规划中所研究的一个基本问题。

一个不等式 $\pi x\leqslant\pi_0$(或者简单地说向量$(\pi,\pi_0)\in R^{n+1}$),若使

$$x\in(S)^\Delta\Rightarrow \pi x\leqslant\pi_0,$$

则称其为$(S)^\Delta$的一个分离。若(π,π_0)是$(S)^\Delta$的一个分离,且

$$F=\{x\mid x\in(S)^\Delta,\ \pi x=\pi_0\}\neq\phi,$$

则称 F(或者简单地说(π,π_0))是$(S)^\Delta$的一个面。

向量 $x^1,\cdots,x^k\in R^n$,若使$(x^2-x^1),\cdots,(x^k-x^1)$线性无关,则称 $x^1,\cdots,x^k$ 仿射无关。一个多面体 D,若 D 中最大仿射无关向量组的元素个数为$k+1$,则称多面体 D 的维数为k,记作 $\dim(D)=k$。特别地,当 $\dim(D)=n$ 时,称 D 是满维的。若 F 是$(S)^\Delta$的一个面,且 $\dim(F)=\dim(S)^\Delta-1$,则称 F(或(π,π_0))为$(S)^\Delta$的一个边界面。

下面介绍几种导出$(S)^\Delta$的分离和面的方法。

(1) 同余方法。设

$$\tilde{S}=\left\{x\mid x\in Z_+^n,\ \sum_{j=1}^n a_jx_j=a_0\right\},$$

设 d 是任意给定的正整数。考虑

$$\tilde{S}_d=\left\{x\mid x\in Z_+^n,\ \sum_{j=1}^n a_jx_j-kd=a_0,\ k\in Z^1\right\}.$$

因为 k 可取为 0,所以 $\tilde{S}\subseteq\tilde{S}_d$。设

$$a_j=b_j+\alpha_jd,\ 0\leqslant b_j<d,\ \alpha_j\in Z^1,\ j=0,\cdots,n,$$

则

$$\tilde{S}_d=\left\{x\mid x\in Z_+^n,\ \sum_{j=1}^n b_jx_j=b_0+yd,\ y\in Z^1\right\}.$$

因为

$$\sum_{j=1}^n b_jx_j\geqslant 0, 0\leqslant b_0<d,\ y\in Z^1,$$

故对任意的 $x\in\tilde{S}_d$,必使 $y\geqslant 0$。因此

$$x\in\tilde{S}\subseteq\tilde{S}_d\Rightarrow\sum_{j=1}^n b_jx_j\geqslant b_0,$$

即$(b_1,\cdots,b_n,b_0)$是$(\tilde{S}^\Delta)$的一个分离。

特别地,当 a_0 不是整数时,可取 $d=1$,这时,$b_j=a_j-\lfloor a_j\rfloor$,上述条件可写为

$$\sum_{j=1}^n(a_j-\lfloor a_j\rfloor)x_j\geqslant a_0-\lfloor a_0\rfloor,$$

通常称这类分离为分数割平面。

(2) 合并方法。若 $\pi^1=(\pi_1^1,\cdots,\pi_n^1)$,$\pi^2=(\pi_1^2,\cdots,\pi_n^2)$,$\pi^1x\leqslant\pi_0^1$ 是 $S_1\subset R_+^n$ 的一个分离,$\pi^2x\leqslant\pi_0^2$ 是 $S_2\subset R_+^n$ 的一个分离,则显然

$$\sum_{j=1}^n\min(\pi_j^1,\ \pi_j^2)x_j\leqslant\max(\pi_0^1,\ \pi_0^2)$$

是 $S_1\cup S_2$ 的一个分离。设

$$\tilde{S} = \left\{x \mid x \in R_+^n,\ x_0 = a_0 - \sum_{j=1}^n a_j x_j,\ x_0 \in Z^1\right\},$$

$$S_1 = \{x \mid x \in \tilde{S},\ x_0 \leqslant \lfloor a_0 \rfloor\}$$

$$= \left\{x \mid x \in R_+^n,\ \sum_{j=1}^n a_j x_j \geqslant a_0 - \lfloor a_0 \rfloor\right\}$$

$$= \left\{x \mid x \in R_+^n,\ \frac{1}{\lfloor a_0 \rfloor - a_0} \sum_{j=1}^n a_j x_j \leqslant -1\right\},$$

$$S_2 = \{x \mid x \in \tilde{S},\ x_0 \geqslant \lfloor a_0 \rfloor + 1\}$$

$$= \left\{x \mid x \in R_+^n,\ \sum_{j=1}^n a_j x_j \leqslant a_0 - \lfloor a_0 \rfloor - 1\right\}$$

$$= \left\{x \mid x \in R_+^n,\ \frac{1}{\lfloor a_0 \rfloor + 1 - a_0} \sum_{j=1}^n a_j x_j \leqslant -1\right\}$$

显然，$\tilde{S} = S_1 \cup S_2$。让

$$\pi_j = \min\left\{\frac{1}{\lfloor a_0 \rfloor - a_0} a_j, \frac{1}{\lfloor a_0 \rfloor + 1 - a_0} a_j\right\},$$

则不等式

$$\sum_{j=1}^n \pi_j x_j \leqslant -1$$

便是 $\tilde{S}$ 的一个分离。

(3) 取整方法。设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{P}_1, \cdots, \boldsymbol{P}_n)$，则集合

$$S = \{x \mid \boldsymbol{A}x \leqslant \boldsymbol{b},\ x \in Z_+^n\}$$

可写为

$$S = \left\{x \,\middle|\, \sum_{j=1}^n x_j \boldsymbol{P}_j \leqslant \boldsymbol{b},\ x \in Z_+^n\right\}.$$

对任意的 $\boldsymbol{u} = (u_1, \cdots, u_m) \geqslant 0$，若 $x \in S$，则有

(ⅰ) $\sum_{j=1}^n (\boldsymbol{u}\boldsymbol{p}_j) x_j \leqslant \boldsymbol{u}\boldsymbol{b} \Rightarrow$

(ⅱ) $\sum_{j=1}^n \lfloor \boldsymbol{u}\boldsymbol{p}_j \rfloor x_j \leqslant \boldsymbol{u}\boldsymbol{b} \Rightarrow$

(ⅲ) $\sum_{j=1}^n \lfloor \boldsymbol{u}\boldsymbol{p}_j \rfloor x_j \leqslant \lfloor \boldsymbol{u}\boldsymbol{b} \rfloor \Rightarrow$

利用不同的 $\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0}$，可以生成不同的分离(ⅲ)。不但如此，利用已经生成的分离，还可以用同样的方式，再反复产生新的分离。这是一种生成 $(S)^{\Delta}$ 的分离的基本过程。凡是能通过这样的过程来生成的分离，称为基本分离。

两个分离：

$$\pi x \leqslant \pi_0;\ \pi' x \leqslant \pi'_0,$$

若 $\pi \leqslant \pi'$ 而 $\pi'_0 \leqslant \pi_0$，则称分离 $(\pi,\ \pi_0)$ 弱于分离 $(\pi',\ \pi'_0)$。

特别地，假如所选取的 $\boldsymbol{u}$ 满足：

$$\boldsymbol{u}\boldsymbol{b} - \lfloor \boldsymbol{u}\boldsymbol{b} \rfloor > 0,\ \boldsymbol{u}\boldsymbol{p}_j = \lfloor \boldsymbol{u}\boldsymbol{p}_j \rfloor,\ \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0},\ (j = 1,\ \cdots,\ n),$$

则称分离

$$\sum_{j=1}^{n} up_j x_j \leqslant \lfloor ub \rfloor$$

为$(S)^{\Delta}$的基本割平面。它的作用是能够割去 P 中的一部分不属于 S 的点。

设

$$\bar{P} = \{x \mid x \in R_+^n,\ Ax \leqslant b,\ x \leqslant 1\},$$
$$\bar{S} = \bar{P} \cap B^n.$$

定理 3.3　若 $\pi x \leqslant \pi_0$ 是$(\bar{S}^{\Delta})$的一个整系数的基本分离，但不是$(\bar{S}^{\Delta})$的面，则

$$\pi x \leqslant \pi_0 - 1$$

是$(\bar{S})^{\Delta}$的一个基本分离或弱于$(\bar{S})^{\Delta}$的某个基本分离。

证明：设 $N = \{1, \cdots, n\}$，N^0，N^1 是 N 的任意两个不相交的子集(可以是空集)。下面，将证明不等式

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_j x_j - \sum_{j \in N^0} x_j + \sum_{j \in N^1} (x_j - 1) \leqslant \pi_0 - 1$$

都是$(\bar{S})^{\Delta}$的基本分离。当 $N^0 = N^1 = \phi$ 时，便是定理所需要的结果。为此，下边将证明

(ⅰ) 当 $|N^0 \cup N^1| = n$ 时命题成立。

(ⅱ) 当 $N^0 = \bar{N}^0 \cup \{k\}$，$N^1 = \bar{N}^1$ 和 $N^0 = \bar{N}^0$，$N^1 = \bar{N}^1 \cup \{k\}$时，命题假如都成立，则能导出 $N^0 = \bar{N}^0$，$N^1 = \bar{N}^1$ 时命题也成立。

对数值$|N^0 \cup N^1|$进行数学归纳，利用(ⅰ)和(ⅱ)，就可推出 $N^0 = N^1 = \phi$ 时命题成立。

先证明(ⅱ)。设$(\bar{S})^{\Delta}$有基本分离：

$$\sum_{j \in N} \pi_j x_j - \sum_{j \in \bar{N}^0} x_j + \sum_{j \in \bar{N}^1} (x_j - 1) - x_k \leqslant \pi_0 - 1,$$
$$\sum_{j \in N} \pi_j x_j - \sum_{j \in \bar{N}^0} x_j + \sum_{j \in \bar{N}^1} (x_j - 1) + (x_k - 1) \leqslant \pi_0 - 1.$$

将上述两不等式分别乘$\frac{1}{2}$后相加，可得

$$\sum_{j \in N} \pi_j x_j - \sum_{j \in \bar{N}^0} x_j + \sum_{j \in \bar{N}^1} (x_j - 1) - \frac{1}{2} \leqslant \pi_0 - 1.$$

因为上式右边是整数，且所有 π_j 和 x_j 的都是整数，故两边取整后，就可得到基本分离：

$$\sum_{j \in N} \pi_j x_j - \sum_{j \in \bar{N}^0} x_j + \sum_{j \in \bar{N}^1} (x_j - 1) \leqslant \pi_0 - 1 .$$

(ⅱ) 得证。

下面证明(ⅰ)。设 N^0 和 N^1 是 N 的任意两个不相交的子集，且使 $N^0 \cup N^1 = N$。定义关联向量 $x \in B^n$ 如下

$$x_j = \begin{cases} 0, & j \in N^0, \\ 1, & j \in N^1. \end{cases}$$

这时，有两种情形：a) $x \in \bar{S}$。因此，根据定理的假设，有

$$\sum_{j \in N^1} \pi_j < \pi_0.$$

b) $x \notin \bar{S}$。因此，必存在某个指标 i，使得

$$\sum_{j \in N^1} a_{ij} > b_i,$$

情形 a)设

$$\omega=\max\{|\pi_j|\,|\,j\in N\},$$

用$\frac{\omega-1}{\omega}$乘$\{\pi x\leqslant\pi_0\}$的两边，对所有的 $j\in N^1$，用$\frac{\omega+\pi_j}{\omega}$乘$\{x_j\leqslant 1\}$的两边，然后，将这些不等式相加，可得

$$\sum_{j\in N}\pi_j x_j-\frac{1}{\omega}\sum_{j\in N}\pi_j x_j+\sum_{j\in N^1}x_j+\frac{1}{\omega}\sum_{j\in N^1}\pi_j x_j\leqslant\pi_0+|N^1|-\frac{1}{\omega}\pi_0+\frac{1}{\omega}\sum_{j\in N^1}\pi_j,$$

即

$$\sum_{j\in N}\pi_j x_j+\sum_{j\in N^1}(x_j-1)-\frac{1}{\omega}\sum_{j\in N^0}\pi_j x_j\leqslant\pi_0-\frac{1}{\omega}\Big(\pi_0-\sum_{j\in N^1}\pi_j\Big).$$

定义

$$\delta_1=\begin{cases}1, & \pi_j>0\\ 0, & 相反\end{cases}\quad(j\in N^0),$$

$$\delta_0=\left\lceil\frac{\pi_0-\sum_{j\in N^1}\pi_j}{\omega}\right\rceil\geqslant 1.$$

因为 $\omega\geqslant|\pi_j|$，$\sum_{j\in N^1}\pi_j<\pi_0$，则两边取整后可得

$$\sum_{j\in N}\pi_j x_j+\sum_{j\in N^1}(x_j-1)-\sum_{j\in N^0}\delta_j x_j\leqslant\pi_0-\delta_0,$$

因此，不等式

$$\sum_{j\in N}\pi_j x_j+\sum_{j\in N^1}(x_j-1)-\sum_{j\in N^0}x_j\leqslant\pi_0-1$$

是$(\bar{S})^{\Delta}$的一个基本分离(或者弱于某个基本分离)。

情形 b)设

$$\sum_{j\in N^1}a_{ij}>b_j,\ \omega=\max\{|a_{ij}|\,|\,j\in N\}$$

用$\frac{1}{\omega}$乘不等式

$$\sum_{j\in N}a_{ij}x_j\leqslant b_i$$

的两边；对所有的 $j\in N^1$，用$\frac{1}{\omega}(\omega-a_{ij})$乘$\{x_j\leqslant 1\}$的两边，然后，将这些不等式和

$$\pi x\leqslant\pi_0$$

相加后可得

$$\sum_{j\in N}\pi_j x_j+\sum_{j\in N^1}x_j+\frac{1}{\omega}\sum_{j\in N^1}a_{ij}x_j+\frac{1}{\omega}\sum_{j\in N}a_{ij}x_j\leqslant\pi_0+|N^1|+\frac{1}{\omega}b_i-\frac{1}{\omega}\sum_{j\in N^1}a_{ij},$$

即

$$\sum_{j\in N}\pi_j x_j+\sum_{j\in N^1}(x_j-1)+\frac{1}{\omega}\sum_{j\in N^0}a_{ij}x_j\leqslant\pi_0-\frac{1}{\omega}\Big(\sum_{j\in N^1}a_{ij}-b_i\Big).$$

定义

$$\delta_j=\begin{cases}1, & a_{ij}<0\\ 0, & 相反\end{cases}\qquad(j\in N^0)$$

$$\delta_0 = \left\lceil \frac{\sum_{j \in N^1} a_{ij} - b_j}{\omega} \right\rceil \geqslant 1.$$

因为 $\omega \geqslant |a_{ij}|$，$\sum_{j \in N^1} a_{ij} > b_i$，则两边取整后可得

$$\sum_{j \in N} \pi_j x_j + \sum_{j \in N^1} (x_j - 1) - \sum_{j \in N^0} \delta_j x_j \leqslant \pi_0 - \delta_0 ,$$

因此,不等式

$$\sum_{j \in N} \pi_j x_j + \sum_{j \in N^1} (x_j - 1) - \sum_{j \in N^0} x_j \leqslant \pi_0 - 1$$

是$(\bar{S})^{\Delta}$的一个基本分离(或者弱于某个基本分离)。证毕。

定理 3.4　若 $\pi x \leqslant \pi_0$ 是$(\bar{S})^{\Delta}$的一个整系数的分离,$\bar{S} \neq \phi$,则 $\pi x \leqslant \pi_0$ 是$(\bar{S})^{\Delta}$的基本分离(或者弱于$(\bar{S})^{\Delta}$的某个基本分离)。

证明:设

$$\pi_0^* = \max\{\pi x \mid x \in \bar{P}\}.$$

对偶线性规划

$$\min\left\{ ub + \sum_{j=1}^{n} v_j \,\middle|\, up_j + v_j \geqslant \pi_j,\ j = 1, \cdots, n,\ u \geqslant 0,\ v \geqslant 0 \right\}$$

的最优解为 $\bar{u}^0 = (u^0,\ v^0)$。因为 π_j 是整数,所以

$$\lfloor u^0 p_j + v_j^0 \rfloor \geqslant \pi_j,\ j = 1, \cdots, n,$$

$$\left\lfloor u^0 b + \sum_{j=1}^{n} v_j^0 \right\rfloor = \lfloor \pi_0^* \rfloor .$$

考虑$(\bar{S})^{\Delta}$的基本分离

$$\sum_{j=1}^{n} \lfloor u^0 p_j + v_j^0 \rfloor x_j \leqslant \left\lfloor u^0 b + \sum_{j=1}^{n} v_j \right\rfloor ,$$

若$\lfloor \pi_0^* \rfloor \leqslant \pi_0$,则不等式

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_j x_j \leqslant \sum_{j=1}^{n} \lfloor u^0 p_j + v_j^0 \rfloor x_j \leqslant \left\lfloor u^0 b + \sum_{j=1}^{n} v_j^0 \right\rfloor \leqslant \pi_0$$

是$(\bar{S})^{\Delta}$的一个基本分离(或者弱于某个基本分离)。若

$$\pi_0 < \lfloor \pi_0^* \rfloor$$

则重复应用定理 3.3,只要应用$(\lfloor \pi_0^* \rfloor - \pi_0)$次后,定理即可得证。证毕。

定理 3.4 从理论上说明,$(\bar{S})^{\Delta}$的任何边界面都是基本分离。

下面,介绍构成$(S)^{\Delta}$的分离的一般方法。

函数 $f: R^m \to R^1$,若满足下述条件(ⅰ)和(ⅱ),则称是超加函数:

(ⅰ) $f(0) = 0$;

(ⅱ) $f(d_1) + f(d_2) \leqslant f(d_1 + d_2)$,对任意的 $d_1,\ d_2 \in R^m$.

函数 f: $R^m \to R^1$,若满足条件

$$f(d_1) \leqslant f(d_2),\ 对任意的\ d_1 \leqslant d_2 \in R^m,$$

则称 f 是非降函数。

对任意给定的 $u^{\mathrm{T}} \in R_+^m$,函数 $f(d) = \lfloor ud \rfloor$便是一个非降的超加函数。

定理 3.5 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{p}_n)$是任给的 $m\times n$ 的有理数矩阵，$\boldsymbol{b}\in R^m$，设

$$S=Z_+^n\cap\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b}\},$$

则对任意非降的超加函数 $f:R^m\to R^1$，不等式

$$\sum_{j=1}^{n}f(\boldsymbol{p}_j)x_j\leqslant f(\boldsymbol{b}) \tag{3.1.5}$$

是$(S)^{\Delta}$的一个分离。

证明：首先，对任意的非负整数 x_j，有

$$f(\boldsymbol{p}_j)x_j\leqslant f(\boldsymbol{p}_jx_j).$$

事实上，当 $x_j=0$ 或 1 时，关系显然成立。当 $x_j=k\geqslant2$ 时，根据 f 的超加性，有关系

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{p}_j)x_j&=f(\boldsymbol{p}_j)+f(\boldsymbol{p}_j)+(k-2)f(\boldsymbol{p}_j)\\&\leqslant f(2\boldsymbol{p}_j)+(k-2)f(\boldsymbol{p}_j)\\&\quad\vdots\\&\leqslant f(\boldsymbol{p}_jx_j).\end{aligned}$$

再根据 f 的超加性和非降性，对任意的 $\boldsymbol{x}\in S$，有

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}f(\boldsymbol{p}_j)x_j&\leqslant\sum_{j=1}^{n}f(\boldsymbol{p}_jx_j)\\&=f(\boldsymbol{p}_1x_1)+f(\boldsymbol{p}_2x_2)+\sum_{j=3}^{n}f(\boldsymbol{p}_jx_j)\\&\leqslant f(\boldsymbol{p}_1x_1+\boldsymbol{p}_2x_2)+\sum_{j=3}^{n}f(\boldsymbol{p}_jx_j)\\&\quad\vdots\\&\leqslant f\Big(\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{p}_jx_j\Big)\\&=f(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})\\&\leqslant f(\boldsymbol{b}),\end{aligned}$$

故(3.1.5)是$(S)^{\Delta}$的一个分离。证毕。

从上述定理的证明中可以看出，假如

$$P=\{\boldsymbol{x}\in R_+^n\mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\},$$
$$S=Z^n\cap P.$$

那么，只要 f 是超加函数，不等式(3.1.5)便是$(S)^{\Delta}$的一个分离。

定理 3.6 设 $h:R^k\to R^1$ 是一个非降的超加函数，$f_i:R^m\to R^1$ 是超加函数($i=1,\cdots,k$)，则

(a)复合函数 $h(f_1,\cdots,f_k)$是超加函数。

(b)若 f_i 是非降的超加函数，则复合函数 $h(f_1,\cdots,f_k)$也是非降的超加函数。

证明：由 f_i 的超加性和 h 的非降性，可得

$$h(f_1(\boldsymbol{d}_1+\boldsymbol{d}_2),\cdots,f_k(\boldsymbol{d}_1+\boldsymbol{d}_2))\geqslant h(f_1(\boldsymbol{d}_1)+f_1(\boldsymbol{d}_2),\cdots,f_k(\boldsymbol{d}_1)+f_k(\boldsymbol{d}_2)).$$

再由 h 的超加性，可得

$$h(f_1(\boldsymbol{d}_1)+f_1(\boldsymbol{d}_2),\cdots,f_k(\boldsymbol{d}_1)+f_k(\boldsymbol{d}_2))\geqslant h(f_1(\boldsymbol{d}_1),\cdots,f_k(\boldsymbol{d}_1))+h(f_1(\boldsymbol{d}_2),\cdots,f_k(\boldsymbol{d}_2))$$

(a)得证。

根据(a),可知复合函数 $h(f_1,\cdots,f_k)$是超加函数。由 f_i 和 h 的非降性,对任意的非负向量 $\boldsymbol{d}_2$,可得

$$h(f_1(\boldsymbol{d}_1+\boldsymbol{d}_2),\cdots,f_k(\boldsymbol{d}_1+\boldsymbol{d}_2))\geqslant h(f_1(\boldsymbol{d}_1),\cdots,f_k(\boldsymbol{d}_1))+h(f_1(\boldsymbol{d}_2),\cdots,f_k(\boldsymbol{d}_2))$$
$$\geqslant h(f_1(\boldsymbol{d}_1),\cdots,f_k(\boldsymbol{d}_1)),$$

故 $h(f_1,\cdots,f_k)$是非降的超加函数。(b)得证。证毕。

定理 3.7 设 $f,g:R^m\to R^1$ 是超加函数,则下述各函数也都是超加函数

(1) λf(对任意的非负实数 λ);

(2) $\lfloor f\rfloor$;

(3) $f+g$;

(4) $\min(f,g)$.

证明:

(1) 因为

$$f(\boldsymbol{d}_1+\boldsymbol{d}_2)\geqslant f(\boldsymbol{d}_1)+f(\boldsymbol{d}_2),\ \text{且}\ \lambda\geqslant 0,\ \text{故}$$
$$\lambda f(\boldsymbol{d}_1+\boldsymbol{d}_2)\geqslant\lambda f(\boldsymbol{d})_1+\lambda f(\boldsymbol{d})_2;$$

(2) 因为

$$f(\boldsymbol{d}_1+\boldsymbol{d}_2)\geqslant f(\boldsymbol{d}_1)+f(\boldsymbol{d}_2),\ \text{故}$$
$$\lfloor f(\boldsymbol{d}_1+\boldsymbol{d}_2)\rfloor\geqslant\lfloor f(\boldsymbol{d}_1)+f(\boldsymbol{d}_2)\rfloor\geqslant\lfloor f(\boldsymbol{d}_1)\rfloor+\lfloor f(\boldsymbol{d}_2)\rfloor;$$

(3) 因为

$$f(\boldsymbol{d}_1+\boldsymbol{d}_2)\geqslant f(\boldsymbol{d}_1)+f(\boldsymbol{d}_2),\ g(\boldsymbol{d}_1+\boldsymbol{d}_2)\geqslant g(\boldsymbol{d}_1)+g(\boldsymbol{d}_2),\text{所以}$$
$$f(\boldsymbol{d}_1+\boldsymbol{d}_2)+g(\boldsymbol{d}_1+\boldsymbol{d}_2)\geqslant[f(\boldsymbol{d}_1)+g(\boldsymbol{d}_1)]+[f(\boldsymbol{d}_2)+g(\boldsymbol{d}_2)];$$

(4) 因为

$$\min(f(\boldsymbol{d}_1+\boldsymbol{d}_2),\ g(\boldsymbol{d}_1+\boldsymbol{d}_2))\geqslant\min(f(\boldsymbol{d}_1)+f(\boldsymbol{d}_2),g(\boldsymbol{d}_1)+g(\boldsymbol{d}_2))$$
$$\geqslant\min(f(\boldsymbol{d}_1),\ g(\boldsymbol{d}_1))+\min(f(\boldsymbol{d}_2),g(\boldsymbol{d}_2)).$$

证毕。

定义函数类 $f_\alpha:R^1\to R^1(0\leqslant\alpha<1)$如下

$$f_\alpha(d)=\begin{cases}\lfloor d\rfloor, & d-\lfloor d\rfloor\leqslant\alpha,\\ \lfloor d\rfloor+\dfrac{1}{1-\alpha}(d-\lfloor d\rfloor-\alpha), & d-\lfloor d\rfloor>\alpha.\end{cases}$$

记

$(d)^+=\max(0,d),d\in R^1$,则

$$f_\alpha(d)=\lfloor d\rfloor+\frac{1}{1-\alpha}(d-\lfloor d\rfloor-\alpha)^+.$$

定理 3.8 对任意的 $\alpha(0\leqslant\alpha<1)$,函数 f_α 都是非降的超加函数。

证明:因为 f_α 是分段线性函数,且各点导数为$\frac{1}{1-\alpha}$或 0,故 f_α 是非降的。对任意的 d_1,$d_2\in R^1$,记 $r_1=d_1-\lfloor d_1\rfloor,r_2=d_2-\lfloor d_2\rfloor$.

情形 1 若 $r_1+r_2<1$,则

$$f_\alpha(d_1)+f_\alpha(d_2)=\lfloor d_1\rfloor+\frac{1}{1-\alpha}(r_1-\alpha)^+\lfloor d_2\rfloor+\frac{1}{1-\alpha}(r_2-\alpha)^+$$

$$\leqslant \lfloor d_1+d_2 \rfloor + \frac{1}{1-\alpha}(r_1+r_2-\alpha)^+$$
$$= f_\alpha(d_1+d_2).$$

情形 2 若 $r_1+r_2 \geqslant 1$,且 r_1 和 r_2 中至少有一个数不大于 α。例如设 $r_2 \leqslant \alpha$,则

$$f_\alpha(d_1)+f_\alpha(d_2) = \lfloor d_1 \rfloor + \frac{1}{1-\alpha}(r_1-\alpha)^+ + \lfloor d_2 \rfloor < \lfloor d_1 \rfloor + \lfloor d_2 \rfloor + 1$$
$$= \lfloor d_1+d_2 \rfloor \leqslant f_\alpha(d_1+d_2).$$

情形 3 若 $r_1+r_2 \geqslant 1$,且 $r_1 > \alpha$, $r_2 > \alpha$,则

$$f_\alpha(d_1)+f_\alpha(d_2) = \lfloor d_1 \rfloor + \frac{1}{1-\alpha}(r_1-\alpha) + \lfloor d_2 \rfloor + \frac{1}{1-\alpha}(r_2-\alpha)$$
$$\leqslant \lfloor d_1 \rfloor + \lfloor d_2 \rfloor + 1 + \frac{1}{1-\alpha}(r_1+r_2-1-\alpha)$$
$$\leqslant f_\alpha(d_1+d_2).$$

因此,f_α 是超加函数。证毕。

根据定理 3.6 和 3.8,可知对任意的 $\boldsymbol{u}$ 和 α, $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \in R_+^m$, $0 \leqslant \alpha < 1$ 函数:

$$f_\alpha(\lfloor \boldsymbol{ud} \rfloor): R^m \to R^1$$

都是非降的超加函数。因此,常常利用它来导出$(S)^\Delta$的各式各样的分离或割平面。

作为这一节的结尾,介绍一种从多面体的低维面构成高维面的方法,通常称其为升高原理。

设

$$P = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in R_+^n,\ A\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}\},$$
$$\bar{P} = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in P,\ \boldsymbol{x} \leqslant 1\},$$
$$\bar{S} = \bar{P} \cap Z^n = P \cap B^n,$$
$$\bar{S}^1 = \bar{S} \cap \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in B^n,\ x_1 = 1\},$$
$$\bar{S}^0 = \bar{S} \cap \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in B^n,\ x_1 = 0\}.$$

定理 3.9 假设不等式

$$\sum_{j=2}^n \pi_j x_j \leqslant \pi_0 \tag{3.1.6}$$

是$(\bar{S}^0)^\Delta$的一个分离,设

$$z = \max\left\{\sum_{j=2}^n \pi_j x_j \mid \boldsymbol{x} \in \bar{S}^1\right\},$$

则对任意的 $\alpha_1 \leqslant \pi_0 - z$,不等式

$$\alpha_1 x_1 + \sum_{j=2}^n \pi_j x_j \leqslant \pi_0 \tag{3.1.7}$$

是$(\bar{S})^\Delta$的一个分离。进一步,若(3.1.6)是$(\bar{S}^0)^\Delta$的一个 k 维面,则

$$(\pi_0 - z)x_1 + \sum_{j=2}^n \pi_j x_j \leqslant \pi_0 \tag{3.1.8}$$

是$(\bar{S})^\Delta$的一个 $k+1$ 维面。

证明:对任意的 $\bar{\boldsymbol{x}} \in \bar{S}$,若 $\bar{x}_1 = 0$,则 $\bar{\boldsymbol{x}} \in \bar{S}^0$,因此

$$\alpha_1 \bar{x}_1 + \sum_{j=2}^n \pi_j \bar{x}_j = \sum_{j=2}^n \pi_j \bar{x}_j \leqslant \pi_0.$$

若 $\bar{x}_1=1$，则 $\bar{x}'\in\bar{S}^1$，因此

$$\alpha_1\bar{x}_1+\sum_{j=2}^{n}\pi_j\bar{x}_j=\alpha_1+\sum_{j=2}^{n}\pi_j\bar{x}_j\leqslant\alpha_1+z\leqslant\pi_0\ .$$

故(3.1.7)是$(\bar{S})^{\Delta}$的一个分离。进一步，若(3.1.6)是 $\bar{S}^0$ 的一个 k 维面，则存在 $k+1$ 个仿射无关的向量 $x^i\in\bar{S}^0$，$i=1,\cdots,k+1$，使得

$$\sum_{j=2}^{n}\pi_jx_j^i=\pi_0,\ i=1,\cdots,k+1,$$
$$x_1^i=0,\qquad i=1,\cdots,k+1,$$

即

$$(\pi_0-z)x_1^i+\sum_{j=2}^{n}\pi_jx_j^i=\pi_0,\ i=1,\cdots,k+1\ ,$$

设

$$z=\sum_{j=2}^{n}\pi_jx_j^*,\ x^*\in\bar{S}^1\ ,$$

则

$$(\pi_0-z)x_1^*+\sum_{j=2}^{n}\pi_jx_j^*=\pi_0\ .$$

显然$\{x^1,\cdots,x^{k+1},\ x^*\}$仿射无关，因此(3.1.8)是$(\bar{S})^{\Delta}$的一个 $k+1$ 维面，证毕。

设 $N=\{1,2,\cdots,n\}$，$N_1\subset N$ 是一个给定的子集，使

$$\sum_{j\in N_1}\pi_jx_j\leqslant\pi_0$$

是$(\bar{S})^{\Delta}$的一个分离。让$\{i_1,i_2,\cdots,i_l\}$和$\{k_1,k_2,\cdots,k_l\}$表示 $N\setminus N_1$ 中元素的任意两个排列，设从分离

$$\sum_{j\in N_1}\pi_jx_j\leqslant\pi_0$$

开始，按上述排列的顺序，每次都极大地应用升高定理 3.9(即每次应用时都取 $\alpha_1=\pi_0-z$)，设最后得到的分离分别为：

$$\sum_{j\in N\setminus N_1}\alpha_jx_j+\sum_{j\in N_1}\pi_jx_j\leqslant\pi_0,$$
$$\sum_{j\in N\setminus N_1}\alpha'_jx_j+\sum_{j\in N_1}\pi_jx_j\leqslant\pi_0,$$

则有

定理 3.10 若 $i_j=k_j,\ j=1,\cdots,h-1,\ i_h=k_s(s>h)$，$k_h=i_r(r>h)$，则 $\alpha_{i_h}\geqslant\alpha'_{k_s}$，$\alpha'_{k_h}\geqslant\alpha_{i_r}$.

证明：因为

$$\alpha_{i_h}=\pi_0-\max_{x\in Q^1}\left\{\sum_{j=1}^{h-1}\alpha_{i_j}x_{i_j}+\sum_{j\in N_1}\pi_jx_j\right\},$$

其中

$$Q^1=\{x\in(S)^{\Delta}\cap B^n\mid x_{i_h}=1,\ x_{i_j}=0,\ j>h\}.$$

$$\alpha'_{k_s} = \pi_0 - \max_{x\in Q^2}\left\{\sum_{j=1}^{h-1}\alpha_{i_j}x_{i_j} + \sum_{j\in N_1}\pi_j x_j + \sum_{j=h}^{s-1}\alpha'_{k_j}x_{k_j}\right\},$$

其中

$$Q^2 = \{x\in (S)^{\Delta}\cap B^n \mid x_{k_s}=1,\ x_{k_j}=0,\ j>s\}.$$

而 $Q^1\subset Q^2$,所以 $\alpha_{i_h}\geqslant\alpha'_{k_s}$。同理可证 $\alpha'_{k_h}\geqslant\alpha_{i_r}$。证毕。

3.2 割平面算法

如 2.8 节中所述,任何线性整数规划问题,都可表示成如下的参数形式

求 $$\max x_0, \tag{3.2.1}$$

满足条件

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \alpha_{00} + \sum_{j=1}^{d}\alpha_{0j}(-t_j),\\ x_1 &= \alpha_{10} + \sum_{j=1}^{d}\alpha_{1j}(-t_j),\\ &\ \vdots\\ x_n &= \alpha_{n0} + \sum_{j=1}^{d}\alpha_{nj}(-t_j),\end{aligned}\right\} \tag{3.2.2}$$

所有的变量 $x_i, t_j\geqslant 0$, (3.2.3)

所有的变量 x_i, t_j 取整数值。 (3.2.4)

记

$$\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\alpha}_j = (\alpha_{0j}, \alpha_{1j}, \cdots, \alpha_{nj})^{\mathrm{T}},\ j=0,\ 1,\cdots,d,$$

则问题可写成如下的向量形式

求 $$\max x_0$$

满足条件

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^{d}\boldsymbol{\alpha}_j(-t_j),$$

所有的变量 x_i, t_j 取非负整数值。

任取一个方程 i:

$$x_i = \alpha_{i0} + \sum_{j=1}^{d}\alpha_{ij}(-t_j) \tag{3.2.5}$$

用任意的 h ($h\neq 0$)乘以式(3.2.5)的两边,得

$$hx_i = h\alpha_{i0} + \sum_{j=1}^{d}h\alpha_{ij}(-t_j). \tag{3.2.6}$$

将各变量的系数分离成整数部分和小数部分后,可得

$$\lfloor h\rfloor x_i + \sum_{i=1}^{d}\lfloor h\alpha_{ij}\rfloor_{t_j} + (h-\lfloor h\rfloor)x_i + \sum_{j=1}^{d}(h\alpha_{ij}-\lfloor h\alpha_{ij}\rfloor)t_j = \lfloor h\alpha_{i0}\rfloor + (h\alpha_{i0}-\lfloor h\alpha_{i0}\rfloor).$$

因为 $x_i\geqslant 0,\ t_j\geqslant 0$,可得

$$\lfloor h \rfloor x_i + \sum_{j=1}^{d} \lfloor h\alpha_{ij} \rfloor t_j \leqslant \lfloor h\alpha_{i0} \rfloor + (h\alpha_{i0} - \lfloor h\alpha_{i0} \rfloor). \tag{3.2.7}$$

进一步,由于 x_i 和 t_j 都要求取整数,因此式(3.2.7)的左边必须是整数。又由于

$$0 \leqslant h\alpha_{i0} - \lfloor h\alpha_{i0} \rfloor < 1,$$

故可推得

$$\lfloor h \rfloor x_i + \sum_{j=1}^{d} \lfloor h\alpha_{ij} \rfloor t_j \leqslant \lfloor h\alpha_{i0} \rfloor. \tag{3.2.8}$$

另一方面,若用$\lfloor h \rfloor$乘式(3.2.5)的两边,又可得

$$\lfloor h \rfloor x_i + \sum_{j=1}^{d} \lfloor h \rfloor \alpha_{ij} t_j = \lfloor h \rfloor \alpha_{i0}. \tag{3.2.9}$$

最后,由式(3.2.9)减去式(3.2.8),可导得关系式

$$\sum_{j=1}^{d} (\lfloor h \rfloor \alpha_{ij} - \lfloor h\alpha_{ij} \rfloor) t_j \geqslant \lfloor h \rfloor \alpha_{i0} - \lfloor h\alpha_{i0} \rfloor. \tag{3.2.10}$$

称条件(3.2.10)为 R.E.Gomory 割平面。称方程(3.2.5)为导出此割平面的诱导方程,它所对应的行 i 称为诱导行。

对非负整数解来说,割平面条件(3.2.10)是条件(3.2.5)的推论。即凡是满足(3.2.10)的非负整数解,自然也满足(3.2.5)。然而满足(3.2.5)的非负解就不一定能满足(3.2.10)。例如当 $\alpha_{i0}>0$ 且不是整数时,(3.2.10)的右边一般都为正数,则满足(3.2.5)的非负解 $x_i=\alpha_{i0}$, $t_j=0, j=1,\cdots,d$,就不满足(3.2.10)。割平面的作用就是能从定义域(3.2.2),(3.2.3)中割去一部分非负解,但不割去非负整数解。根据 h 的不同取值,下面将导出各种形式的割平面。

在 Gomory 割平面(3.2.10)中,让 $h=1$,则可得

$$\sum_{j=1}^{d} (\alpha_{ij} - \lfloor \alpha_{ij} \rfloor) t_j \geqslant \alpha_{i0} - \lfloor \alpha_{i0} \rfloor.$$

记

$$r_{ij} = \alpha_{ij} - \lfloor \alpha_{ij} \rfloor, \ j = 0, 1, \cdots, d.$$

上式可写为

$$\sum_{j=1}^{d} r_{ij} t_j \geqslant r_{i0}.$$

引进非负的松弛变量 s_i,得条件

$$s_i = -r_{r0} + \sum_{j=1}^{d} r_{ij} t_j, \tag{3.2.11}$$

称(3.2.11)为分数割平面。方程(3.2.11)中的各个系数是方程(3.2.5)中的各个系数的小数部分。

因为

$$x_i = \left(\lfloor \alpha_{i0} \rfloor - \sum_{j=1}^{d} \lfloor \alpha_{ij} \rfloor t_j\right) - \left(-r_{i0} + \sum_{j=1}^{d} r_{ij} t_j\right) = \left(\lfloor \alpha_{i0} \rfloor - \sum_{j=1}^{d} \lfloor \alpha_{ij} \rfloor t_j\right) - s_i,$$

所以当 x_i, t_j 都取非负整数值时,s_i 自然也取非负整数值。

称问题(3.2.1)~(3.2.4)为(P)。称线性规划问题(3.2.1)~(3.2.3)为($\tilde{\mathrm{P}}$)。称($\tilde{\mathrm{P}}$)为(P)的松弛问题。

求解整数规划(P)的分数割平面程序:

步骤 1 利用 2.8 节中的字典序单纯形方法，求解松弛问题($\tilde{\mathrm{P}}$)。若($\tilde{\mathrm{P}}$)没有最优解，则容易证明，(P)也没有最优解，步骤终止。若($\tilde{\mathrm{P}}$)有最优解，设达到最优解的表达式为

$$x = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{d} \alpha_j(-t_j),$$

即此时有

$$\alpha_{i0} \geqslant 0,\ \alpha_{0j} \geqslant 0,\ i = 0, 1, \cdots, n,\ j = 1, \cdots, d.$$

步骤 2 若所有的 α_{i0} 都是整数，则步骤终止，$x = \alpha_0$ 便是(P)的最优解。相反，设 α_{l0} 是 α_0 中的最头上的非整数分量。即

$$l = \min\{i \mid \alpha_{i0}\text{不是整数},\ i = 0, 1, \cdots, n\}.$$

取诱导方程为

$$x_l = \alpha_{l0} + \sum_{j=1}^{d} \alpha_{lj}(-t_j),$$

即取诱导行为 l.

步骤 3 从诱导方程导出分数割平面

$$s_l = -r_{l0} - \sum_{j=1}^{d} r_{lj}(-t_j),$$

其中的 $r_{lj} = \alpha_{lj} - \lfloor \alpha_{lj} \rfloor$.

步骤 4 按字典序的大小，计算

$$\max\left\{\frac{-1}{r_{lj}}\alpha_j \,\middle|\, r_{lj} > 0,\ 1 \leqslant j \leqslant d\right\} = \frac{-1}{r_{ls}}\alpha_s.$$

步骤 5 作参数变换

$$\bar{t}_s = s_l,\ \bar{t}_j = t_j,\ 1 \leqslant j \neq s \leqslant d,$$

$$t_s = \frac{-1}{r_{ls}} r_{l0} + \frac{1}{r_{ls}} s_l - \sum_{j \neq s} \frac{1}{r_{ls}} r_{lj} t_j,$$

得新的表达式

$$x = \bar{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^{d} \bar{\alpha}_j(-\bar{t}_j),\ \text{所有的}\ x_i,\ \bar{t}_j \in Z_+^1,$$

其中

$$\bar{\alpha}_s = \frac{1}{r_{ls}}\alpha_s,\ \bar{\alpha}_j = \alpha_j - \frac{1}{r_{ls}} r_{lj}\alpha_s,\ j \neq s.$$

步骤 6 若 $\bar{\alpha}_0 \geqslant 0$，则转到步骤 2；相反，转到步骤 1，求改进后的(即加上割平面条件后的)线性规划松弛问题的最优解。

根据割平面的性质，在步骤 5 中的参数变换下，问题的解集不变。

定理 3.11 对整数规划(P)，分数割平面程序必在有限步内终止。

证明：用反证法。假设过程无限。设

$$x = \alpha_0^k + \sum_j \alpha_j^k(-t_j^k),\ k = 1, 2, \cdots,$$

是计算过程中的表达式序列。设其中的无限子序列

$$x = \alpha_0^{k_e} + \sum_j \alpha_j^{k_e}(-t_j^{k_e}),\ e = 1, 2, \cdots,$$

使 $\boldsymbol{\alpha}_{0}^{k_t}\geqslant 0$(这样的子序列必存在。否则已发现某个松弛问题($\tilde{\mathrm{P}}$)无允许解,步骤已在有限部内终止)。根据字典序单纯形算法的性质(定理 2.25),有 $\boldsymbol{\alpha}_0^{k}\succ\boldsymbol{\alpha}_0^{k+1}$。又因为其中有无限的子序列$\{\boldsymbol{\alpha}_0^{k_t}\}$,使 $\boldsymbol{\alpha}_0^{k_t}\geqslant 0$,故必有 $\boldsymbol{\alpha}_0^{k}\succ 0$, $k=1,2,\cdots$。因此,$\{\alpha_{00}^{k}\}$必为非增数列,且下界为0。因此,必存在整数 n_0 和 k_u,使得对所有的 k,有 $\alpha_{00}^{k}\geqslant n_0$,而当 $k\geqslant k_u$ 时,$\alpha_{00}^{k}<n_0+1$。设 $\alpha_{00}^{k_u}=n_0+r_0<n_0+1$。若 $r_0=0$,则当 $k\geqslant k_u$ 时,就有 $\alpha_{00}^{k}=n_0$。若 $0<r_0<1$,则由步骤 2,第 k_u 个表达式的诱导行号必为 0。经步骤 5 中参数变换后,有关系

$$\alpha_{00}^{k_u+1}=\alpha_{00}^{k_u}-\frac{1}{\alpha_{0s}^{k_u}-\lfloor\alpha_{0s}^{k_u}\rfloor}r_0\alpha_{0s}^{k_u}\leqslant\alpha_{00}^{k_u}-r_0=n_0,$$

其中 s 的表示被替换的参数是第 s 个参变量。因此,当 $k>k_u$ 时,必有 $\alpha_{00}^{k}=n_0$。因为 $\boldsymbol{\alpha}_0^{k}\succ\boldsymbol{\alpha}_0^{k+1}$,则在 k_u 步以后,$\{\alpha_{10}^{k}\}$必为非增数列,同样,其下界为 0。故必存在整数 n_1 和 k_v, $n_1\geqslant n_0$, $k_v\geqslant k_u$,使得当 $k\geqslant k_v$ 时,有 $\alpha_{10}^{k}\geqslant n_1\geqslant 0$, $\alpha_{10}^{k}<n_1+1$。设 $\alpha_{10}^{k_v}=n_1+r_1<n_1+1$。若 $r_1=0$,则当 $k\geqslant k_v$ 时,就有 $\alpha_{10}^{k}=n_1$。若 $0<r_1<1$,则当 $k\geqslant k_v$ 时,因为 α_{00}^{k}已保持整数 n_0 不变,由步骤 2,第 k_v 个表达式的诱导号行必为 1。经步骤 5 中的参数变换后,得

$$\alpha_{00}^{k_v+1}=\alpha_{00}^{k_v}=n_0,\ \alpha_{10}^{k_v+1}=\alpha_{10}^{k_v}-\frac{r_1\alpha_{1s}^{k_v}}{\alpha_{1s}^{k_v}-\lfloor\alpha_{1s}^{k_v}\rfloor}.$$

这里,仍然假设被替换的参数是第 s 个参变量。由于 α_{00}已保持定值,故必有

$$\alpha_{0s}^{k_v}=0.\ \boldsymbol{\alpha}_s^{k_v}\succ 0,\ \alpha_{1s}^{k_v}>0,$$

因此,有

$$\alpha_{10}^{k_v+1}\leqslant\alpha_{10}^{k_v}-r_1=n_1,$$

这就证明了当 $k>k_v$ 时,必有

$$\alpha_{00}^{k}=n_0,\ \alpha_{10}^{k}=n_1,$$

重复上述论证,考虑 α_{20}^{k}, α_{30}^{k},…,最后可得:当 k 足够大时,$\boldsymbol{\alpha}_0^{k}$ 必保持不变。这就与 $\boldsymbol{\alpha}_0^{k}\succ\boldsymbol{\alpha}_0^{k+1}$相矛盾。证毕。

【例 3.1】 求 $\min 4x+5y$,

满足

$$3x+2y\geqslant 7,$$
$$x+4y\geqslant 5,$$
$$3x+y\geqslant 2,$$
x,y 为非负整数.

写成参数形式为

求 $\max x_0$

满足条件

$$x_0=-4x_4-5x_5+C_0,$$
$$x_1=-7+3x_4+2x_5,$$
$$x_2=-5+x_4+4x_5,$$
$$x_3=-2+3x_4+x_5,$$
$x_1,\cdots,x_5$ 为非负整数.

其中的 C_0 表示足够大的正整数，例如可取 $C_0=100$。

步骤 1　用字典序单纯形方法，求解松弛的线性规划问题。得表 3.1。

步骤 2　因 α_{00}不是整数，选诱导方程为

$$x_0=C_0-\frac{112}{10}-\frac{11}{10}x_1-\frac{7}{10}x_2.$$

步骤 3　导出割平面

$$s_0=-\frac{8}{10}-\frac{1}{10}(-x_1)-\frac{7}{10}(-x_2).$$

步骤 4　求

$$\max\left\{\frac{1}{-\frac{1}{10}}\alpha_1,\ \frac{1}{-\frac{7}{10}}\alpha_2\right\}=-\frac{10}{7}\alpha_2.$$

步骤 5　以 s_0 替换 x_2 得表 3.2。

步骤 6　因已得线性规划最优解，故转到步骤 2。

步骤 2　因 α_{20}不是整数，选诱导方程为

$$x_2=\frac{8}{7}+\frac{1}{7}(-x_1)-\frac{10}{7}(-s_0).$$

步骤 3　导出割平面

$$s_2=-\frac{1}{7}-\frac{1}{7}(-x_1)-\frac{4}{7}(-s_0).$$

步骤 4　求

$$\max\left\{\frac{1}{-\frac{1}{7}}\alpha_1,\frac{1}{-\frac{4}{7}}\alpha_2\right\}=-\frac{7}{4}\alpha_2,\ s=2.$$

步骤 5　以 s_2 替换 s_0，得表 3.3。

步骤 6　因已获线性规划最优解，故转到步骤 2。

步骤 2　因 α_{00}不是整数，选诱导方程为

$$x_0=C_0-12\frac{1}{4}+\frac{3}{4}(-x_1)+\frac{7}{4}(-s_2).$$

表 3.1

	1	$-x_1$	$-x_2$
$x_0=$	$C_0-\frac{112}{10}$	$\frac{11}{10}$	$\frac{7}{10}$
$x_1=$	0	-1	0
$x_2=$	0	0	-1
$x_3=$	$\frac{42}{10}$	$-\frac{11}{10}$	$\frac{3}{10}$
$x_4=$	$\frac{18}{10}$	$-\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$
$x_5=$	$\frac{8}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{3}{10}$

表 3.2

1	$-x_1$	$-s_0$
C_0-12	1	1
0	-1	0
$\frac{8}{7}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{10}{7}$
$\frac{27}{7}$	$-\frac{8}{7}$	$\frac{3}{7}$
$\frac{11}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$
$\frac{8}{7}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{3}{7}$

表 3.3

	1	$-x_1$	$-x_2$
$x_0=$	$C_0-12\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{10}$
$x_1=$	0	-1	0
$x_2=$	$\frac{6}{4}$	$\frac{2}{4}$	$-\frac{10}{4}$
$x_3=$	$\frac{15}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$
$x_4=$	$\frac{6}{4}$	$-\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$
$x_5=$	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$

表 3.4

1	$-S'_0$	$-s_2$
C_0-13	1	1
1	$-\frac{4}{3}$	1
1	$\frac{2}{3}$	-3
5	$-\frac{5}{3}$	2
2	$-\frac{2}{3}$	1
1	$\frac{1}{3}$	-1

步骤 3 导出割平面

$$s'_0=-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}(-x_1)-\frac{3}{4}(-s_2).$$

步骤 4 求

$$\max\left\{\frac{1}{-\frac{3}{4}}\alpha_1,\ \frac{1}{-\frac{3}{4}}\alpha_2\right\}=-\frac{4}{3}\alpha_2,\ s=1.$$

步骤 5 以 s'_0 替换 x_1,得表 3.4。

步骤 6 因已获线性规划最优解,故转到步骤 2。

步骤 2 因 α_0 已是整数向量,故步骤终止。整数规划问题的最优解为 $x=x_4=2$, $y=x_5=1$,目标函数最小值为 13。计算过程如图 3.1 中点①→②→③→④→⑤→⑥。

第一个割平面为

$$s_0=-\frac{8}{10}+\frac{1}{10}x_1+\frac{7}{10}x_2=-5+x_4+3x_5\geqslant 0.$$

加上它后,使点③→点④。

第二个割平面为

$$s_2=-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}x_1+\frac{4}{7}s_0=-4+x_4+2x_5\geqslant 0$$

加上它后,使点④→点⑤。

第三个割平面为

$$s'_0=-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}x_1+\frac{3}{4}s_2=-9+3x_4+3x_5\geqslant 0.$$

加上它后,使点⑤→点⑥。

对于诱导方程

$$x_l=\alpha_{l0}+\sum_{j=1}^{d}\alpha_{lj}(-t_j),$$

若在 Gomory 割平面(3.2.10)中,让 $h=\frac{1}{\lambda}$, $\lambda>1$,则可得不等式

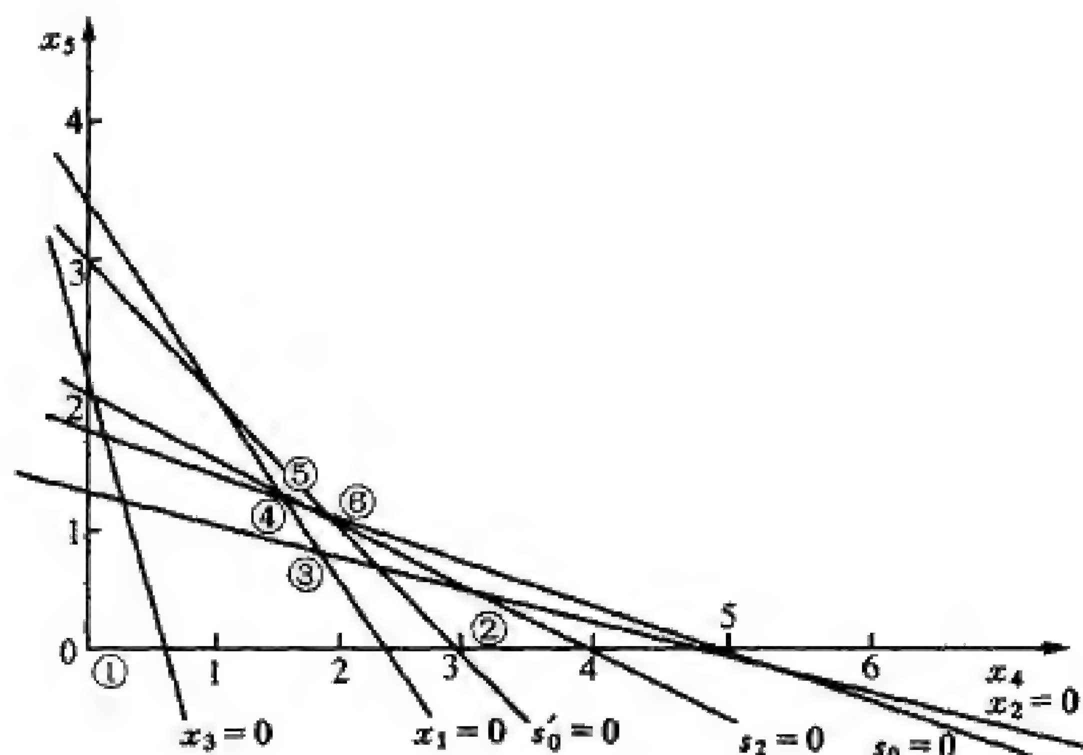


图 3.1

$$\left\lfloor\frac{\alpha_{l0}}{\lambda}\right\rfloor+\sum_{j=1}^{d}\left\lfloor\frac{\alpha_{lj}}{\lambda}\right\rfloor(-t_j)\geqslant\left\lfloor\frac{1}{\lambda}\right\rfloor\alpha_{l0}+\sum_{j=1}^{d}\left\lfloor\frac{1}{\lambda}\right\rfloor\alpha_{lj}(-t_j)$$

$$=\left\lfloor\frac{1}{\lambda}\right\rfloor x_l\geqslant 0.$$

引进松弛变量 s_l 后，可得条件

$$s_l=\left\lfloor\frac{\alpha_{l0}}{\lambda}\right\rfloor+\sum_{j=1}^{d}\left\lfloor\frac{\alpha_{lj}}{\lambda}\right\rfloor(-t_j)\geqslant 0. \tag{3.2.12}$$

显然，当 t_j 是非负整数时，s_l 也必取非负整数。称(3.2.12)为整数割平面。

求解(P)的对偶整数割平面程序：

假设有满足如下性质(ⅰ)和(ⅱ)的参数表达式：

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}_0+\sum_j\boldsymbol{\alpha}_j(-t_j).$$

(ⅰ) 整数性。所有的 α_{ij} 都是整数。

(ⅱ) 字典序正。$\boldsymbol{\alpha}_j\succ 0,\ j=1,\ \cdots,\ d$. 一般的说可利用 2.8 节中的 M 方法，求上述的初始表达式。

步骤 1　若 $\boldsymbol{\alpha}_0\geqslant\boldsymbol{0}$，则步骤终止，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}_0$ 便是(P)的最优解。相反，设

$$l=\min\{i\mid\alpha_{i0}<0,\ 0\leqslant i\leqslant n\}.$$

诱导方程为

$$x_l=\alpha_{l0}+\sum_j\alpha_{lj}(-t_j).$$

步骤 2　若所有的 $\alpha_{lj}\geqslant 0$，则步骤终止，(P)无允许解。相反，按字典序的大小，求

$$\boldsymbol{\alpha}_s=\min\{\boldsymbol{\alpha}_j\mid\alpha_{lj}<0,\ 1\leqslant j\leqslant d\}.$$

步骤 3　求

$$\lambda=\max\{|\alpha_{lj}|\mid\alpha_{lj}<0,\ 1\leqslant j\leqslant d\}.$$

步骤 4　导出整数割平面

$$s_l=\left\lfloor\frac{\alpha_{l0}}{\lambda}\right\rfloor+\sum_j\left\lfloor\frac{\alpha_{lj}}{\lambda}\right\rfloor(-t_j).$$

步骤 5　利用割平面条件，作参数变换

$$\bar{t}_s = s_l,\ \bar{t}_j = t_j,\ 1 \leqslant j \neq s \leqslant d,$$

$$t_s = -\left\lfloor \frac{\alpha_{l0}}{\lambda} \right\rfloor - \sum_{j \neq s} \left\lfloor \frac{\alpha_{lj}}{\lambda} \right\rfloor (-t_j) - (-s_l),$$

得新的表达式

$$x = \bar{\boldsymbol{\alpha}}_0 + \sum_j \bar{\boldsymbol{\alpha}}_j (-\bar{t}_j),$$

其中

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}_s = \boldsymbol{\alpha}_s,\ \bar{\boldsymbol{\alpha}}_j = \boldsymbol{\alpha}_j + \left\lfloor \frac{\alpha_{lj}}{\lambda} \right\rfloor \boldsymbol{\alpha}_s,\ j \neq s,$$

然后转到步骤 1。

从 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 和 $\bar{\boldsymbol{\alpha}}_j$ 之间的关系式可以看出，计算过程中保持了表达式的系数的整数性(主要因为旋转元为 $\left\lfloor \frac{\alpha_{ls}}{\lambda} \right\rfloor = -1$)。

若 $\alpha_{lj} \geqslant 0$，则显然有 $\bar{\boldsymbol{\alpha}}_j \succcurlyeq \boldsymbol{\alpha}_j \succ 0$

若 $\alpha_{lj} \leqslant 0$，则由 λ 和 s 的取法，可知

$$\left\lfloor \frac{\alpha_{lj}}{\lambda} \right\rfloor = -1,\ \bar{\boldsymbol{\alpha}}_j = \boldsymbol{\alpha}_j - \boldsymbol{\alpha}_s \succ 0.$$

因此，计算过程中也保持了 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 的字典序正的性质。

由 $\alpha_{l0} < 0$，可知

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}_0 = \boldsymbol{\alpha}_0 + \left\lfloor \frac{\alpha_{l0}}{\lambda} \right\rfloor \boldsymbol{\alpha}_s \preccurlyeq \boldsymbol{\alpha}_0 - \boldsymbol{\alpha}_s,$$

即

$$\boldsymbol{\alpha}_0 - \bar{\boldsymbol{\alpha}}_0 \succcurlyeq \boldsymbol{\alpha}_s \succ 0.$$

因此，计算过程中也保持了向量 $\boldsymbol{\alpha}_0$ 的字典序单调下降性。

定理 3.12 若问题(P)的定义域非空，则对偶整数割平面程序必在有限步内终止。

证明：设

$$x = \boldsymbol{\alpha}_0^k + \sum_j \boldsymbol{\alpha}_j^k (-t_j^k),\ k = 1, 2, \cdots,$$

为计算过程中的参数表达序列，由性质：

$$\boldsymbol{\alpha}_0^k \succ \boldsymbol{\alpha}_0^{k+1},$$

可知 $\{\alpha_{00}^k\}$ 必为非增的整数序列。由(P)的定义域非空，容易证明，α_{00}^k 必有下界。一个有下界的非增的整数序列，只能取有限个不同的数值。因此，在 k_0 某步以后，α_{00}^k 必保持某固定的整数不变。此后，$\{\alpha_{10}^k\}$ 必为非增整数序列。假设有某个 $k > k_0$，使 $\alpha_{10}^k < 0$，则根据步骤 1，诱导行应取为 1。设被替换的参变量为 t_s^k，则有

$$\alpha_{10}^{k+1} = \alpha_{10}^k + \alpha_{1s}^k \left\lfloor \frac{\alpha_{10}^k}{\lambda} \right\rfloor.$$

由于

$$\alpha_{1s}^k < 0,\ \alpha_{10}^k < 0,$$

可得

$$\alpha_{10}^{k+1} > \alpha_{10}^k,$$

与非增性相矛盾。因此，当 $k\geqslant k_0$ 时，必有

$$\alpha_{10}^{k}\geqslant 0.$$

因此，必存在某整数 $k_1\geqslant k_0$，使得当 $k\geqslant k_1$ 时，α_{00}^{k}，α_{10}^{k}，都保持固定的整数不变。重复上述论证，依次考虑 α_{20}^{k}，α_{30}^{k}，…，命题即可得证。证毕。

下面表 3.5～3.7 是对例 1 用对偶整数割平面方法求解。

表中附记号"#"的行是诱导行，附"↓"的变量是被替换的参变量。变换过程是图 3.2 中点①→点 B→点 C

表 3.5

	1	$-x_4$	$-x_5$
x_0	0	4	5
# x_1	−7	−3	−2
x_2	−5	−1	−4
x_3	−2	−3	−1
x_4	0	−1	0
x_5	0	0	−1
s_1	−3	−1	−1

表 3.6

	1	$-s_1$	$-x_5$
x_0	−12	4	1
x_1	2	−3	1
# x_2	−2	−1	−3
x_3	7	−3	2
x_4	3	−1	1
x_5	0	0	−1
s_2	−1	−1	−1

表 3.7

	1	$-s_1$	$-s_2$
x_0	−13	3	1
x_1	1	−4	1
x_2	1	2	−4
x_3	5	−5	2
x_4	2	−2	1
x_5	1	1	−1

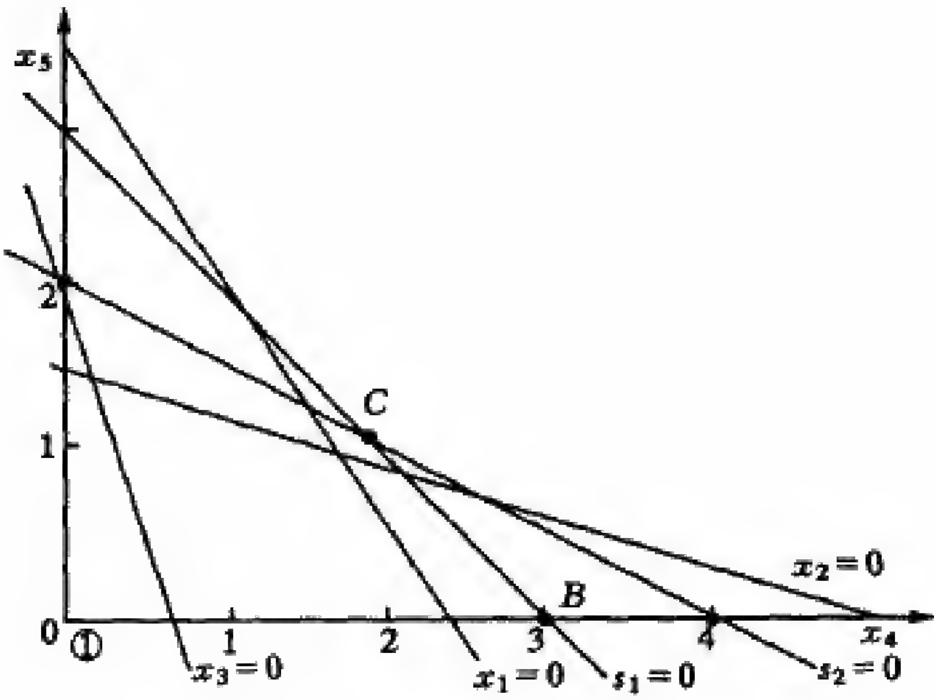


图 3.2

分数割平面算法，是从满足条件

(a) $\alpha_{i0}\geqslant 0,\ i=1,\cdots,n.$

(b) $\alpha_{0j}\geqslant 0,\ j=1,\cdots,d$

的表达式出发，最后到达满足条件：

(c) 所有的 α_{i0} 为整数。

对偶整数割平面算法是从满足条件(b)和(c)的表达式出发，最后达到满足条件(a)。

下面介绍的原始割平面算法是从满足条件(a)和(c)的表达式出发，最后达到满足条件(b)。

假设有表达式

$$x = \boldsymbol{\alpha}_0 + \sum_j \boldsymbol{\alpha}_j(-t_j),$$

它满足条件

(i) $\boldsymbol{\alpha}_0 \geqslant \mathbf{0}$;

(ii) 所有的 a_{ij} 都是整数;

(iii) 表达式中存在某方程 p,使得对 $j=1,\cdots,n$,有性质:

性质(Ⅰ) 若 $\boldsymbol{\alpha}_j < 0$,则 $\alpha_{pj} > 0$.

性质(Ⅱ) 若 $\alpha_{pj} < 0$,则按向量字典序顺序,有关系

$$\frac{1}{\alpha_{pj}}\boldsymbol{\alpha}_j < \min\left\{\frac{1}{\alpha_{pk}}\boldsymbol{\alpha}_k \,\middle|\, \alpha_{pk} > 0,\ 1 \leqslant k \leqslant n\right\}.$$

假如表达式中没有这样的方程 p,可附加一个方程

$$x_p = M + \sum_j(-t_j),$$

其中 M 是足够大的整数。显然,此附加的方程满足性质(Ⅰ)和(Ⅱ)。

原始整数割平面程序:

步骤 1 (选择被替换的变量 t_s)

若 $\alpha_{0j} \geqslant 0$, $j=1,\cdots,d$,则步骤终止。$x = \boldsymbol{\alpha}_0$ 便是(P)的最优解。相反,按字典序顺序,求

$$\frac{1}{\alpha_{ps}}\boldsymbol{\alpha}_s = \min\left\{\frac{1}{\alpha_{pj}}\boldsymbol{\alpha}_j \,\middle|\, \alpha_{pj} > 0,\ j \geqslant 1\right\}.$$

(根据性质(Ⅰ),显然有 $\alpha_{0s} < 0$)

步骤 2 (选择诱导行 l)

首先计算

$$\theta_s = \frac{\alpha_{r0}}{\alpha_{rs}} = \min\left\{\frac{\alpha_{i0}}{\alpha_{is}} \,\middle|\, \alpha_{is} > 0\right\}.$$

步骤 2.1 若 $\theta_s \geqslant 1$, 则取 $l = r$(称此为非退化情形)。否则,进行步骤 2.2。

步骤 2.2 若 $\theta_s < 1$(称此为退化情形),则选取 l 的规则如下:

步骤 2.2.1 设在前一次变换中,所选的诱导行为 l',而此时有

$$0 \leqslant \alpha_{l'0} < \alpha_{l's}.$$

则继续选取 l' 作为诱导行 l。否则进行步骤 2.2.2。

步骤 2.2.2 若特殊行 P 满足 $0 \leqslant \alpha_{p0} < \alpha_{ps}$,则选取 $l = p$,并进行步骤 2.2.3。

步骤 2.2.3 若对所有的 $i \geqslant 1$,有

$$\alpha_{i0} \geqslant \frac{1}{\alpha_{ps}}\alpha_{is},$$

则进行步骤 2.2.4,否则,求

$$i^* = \min\left\{i \,\middle|\, \alpha_{i0} < \frac{1}{\alpha_{ps}}\alpha_{is},\ i \geqslant 1\right\}.$$

选取 $l = i^*$(因为 $\alpha_{ps} > 0$, $\alpha_{i0} \geqslant 0$,故 $\alpha_{i^*s} > 0$)。

步骤 2.2.4 取

$$l = \min\{i \mid \alpha_{i0} < \alpha_{is},\ i \geqslant 1\}.$$

步骤 3 选取 $\lambda = \alpha_{ls} > 0$,导出整数割平面

$$s_l = \left\lfloor \frac{\alpha_{l0}}{\lambda} \right\rfloor + \sum_j \left\lfloor \frac{\alpha_{lj}}{\lambda} \right\rfloor (-t_j).$$

步骤 4 利用割平面条件，作参数变换

$$\bar{t}_s = s_l,\ \bar{t}_j = t_j,\ 1 \leqslant j \neq s \leqslant d,$$

$$t_s = \left\lfloor \frac{\alpha_{l0}}{\lambda} \right\rfloor + \sum_{j \neq s} \left\lfloor \frac{\alpha_{lj}}{\lambda} \right\rfloor (-t_j) + (-s_l),$$

得新的表达式

$$x = \bar{\boldsymbol{\alpha}}_0 + \sum_j \bar{\boldsymbol{\alpha}}_j (-\bar{t}_j).$$

其中

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}_s = -\boldsymbol{\alpha}_s > 0, \tag{3.2.13}$$

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}_j = \boldsymbol{\alpha}_j - \left\lfloor \frac{\alpha_{lj}}{\lambda} \right\rfloor \boldsymbol{\alpha}_s,\ j \neq s. \tag{3.2.14}$$

然后，转到步骤 1。

从关系(3.2.13)和(3.2.14)，可知变换过程中保持了表达式系数的整数性。从关系式

$$\bar{\alpha}_{i0} = \alpha_{i0} - \left[\frac{\alpha_{l0}}{\alpha_{ls}} \right] \alpha_{is} \geqslant \alpha_{i0} - \theta_s \alpha_{is} \geqslant 0$$

可知在变换过程中，保持了 $\boldsymbol{\alpha}_0$ 的非负性。特别地，在退化情形，有 $\bar{\alpha}_{i0} = \alpha_{i0},\ i = 0, 1, \cdots, n$。

下面证明，在变换过程中，保持条件(ⅲ)。

假设 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 满足性质(Ⅰ)和(Ⅱ)。设表达式

$$x = \boldsymbol{\alpha}_0 + \sum_j \boldsymbol{\alpha}_j (-t_j)$$

的诱导行为 l，被替换的变量为 t_s。设替换后的表达式为

$$x = \bar{\boldsymbol{\alpha}}_0 + \sum_j \bar{\boldsymbol{\alpha}}_j (-\bar{t}_s),$$

且设它的诱导行为 $\bar{l}$，被替换的变量为 $\bar{t}_s$。

性质 1 对任何的 $j \neq 0,\ s$，有

$$\alpha_{pj} \boldsymbol{\alpha}_s \prec \alpha_{ps} \boldsymbol{\alpha}_j.$$

证明：若 $\alpha_{pj} > 0$，则由 s 的选法(步骤 1)，可知命题成立。若 $\alpha_{pj} < 0$，则由性质(Ⅱ)，可知命题成立。若 $\alpha_{pj} = 0$，则由性质(Ⅰ)及 $\alpha_{ps} > 0$，可知命题成立。证毕。

性质 2 对任何的 $j \neq 0, s$，有

$$\bar{\alpha}_{pj} \boldsymbol{\alpha}_s \prec \alpha_{ps} \bar{\boldsymbol{\alpha}}_j.$$

证明：因为

$$\alpha_{ps} \bar{\boldsymbol{\alpha}}_j - \bar{\alpha}_{pj} \boldsymbol{\alpha}_s = \alpha_{ps} \left(\boldsymbol{\alpha}_j - \left\lfloor \frac{\alpha_{lj}}{\alpha_{ls}} \right\rfloor \boldsymbol{\alpha}_s \right) - \left(\alpha_{pj} - \left\lfloor \frac{\alpha_{lj}}{\alpha_{ls}} \right\rfloor \alpha_{ps} \right) \boldsymbol{\alpha}_s$$

$$= \alpha_{ps} \boldsymbol{\alpha}_j - \alpha_{pj} \boldsymbol{\alpha}_s$$

由性质 1，可知命题成立。证毕。

性质 3 $\bar{\boldsymbol{\alpha}}_j$ 满足条件(ⅲ)中的性质(Ⅰ)。

证明：若 $\bar{\boldsymbol{\alpha}}_j \prec 0,\ j \neq 0$，则显然 $j \neq s$。因为 $\boldsymbol{\alpha}_s \prec 0, \alpha_{ps} > 0$，由性质 2，即可得 $\bar{\alpha}_{pj} > 0$。证毕。

性质 4 $\bar{\boldsymbol{\alpha}}_j$ 满足条件(ⅲ)中的性质(Ⅱ)

证明：若 $\bar{\alpha}_{pj}>0$，则显然 $j\neq s$。由性质 2，可得

$$\frac{\boldsymbol{\alpha}_s}{\alpha_{ps}}\prec\frac{\bar{\boldsymbol{\alpha}}_j}{\bar{\alpha}_{pj}},\ j\neq 0,s.$$

若 $\bar{\alpha}_{pj}<0$，且 $j\neq 0,s$，则由性质 2，可得

$$\frac{\boldsymbol{\alpha}_s}{\alpha_{ps}}\succ\frac{\bar{\boldsymbol{\alpha}}_j}{\bar{\alpha}_{pj}}.$$

若 $j=s$，则由 $\bar{\alpha}_{ps}=-\alpha_{ps}$，$\bar{\boldsymbol{\alpha}}_s=-\boldsymbol{\alpha}_s$ 可得

$$\frac{\boldsymbol{\alpha}_s}{\alpha_{ps}}=\frac{\bar{\boldsymbol{\alpha}}_s}{\bar{\alpha}_{ps}}.$$

因此，可得关系式（按向量的字典序大小）：

$$\frac{\boldsymbol{\alpha}_s}{\alpha_{ps}}=\frac{\bar{\boldsymbol{\alpha}}_s}{\bar{\alpha}_{ps}}=\max\left\{\frac{\bar{\boldsymbol{\alpha}}_j}{\bar{\alpha}_{pj}}\middle|\bar{\alpha}_{pj}<0,\ j\neq 0\right\},\tag{3.2.15}$$

$$\frac{\boldsymbol{\alpha}_s}{\alpha_{ps}}\prec\min\left\{\frac{\bar{\boldsymbol{\alpha}}_j}{\bar{\alpha}_{pj}}\middle|\bar{\alpha}_{pj}>0,\ j\neq 0\right\},\tag{3.2.16}$$

由(3.2.15)，(3.2.16)，命题即可得证。证毕。

性质 5 $\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_s}{\alpha_{ps}}\prec\dfrac{\bar{\boldsymbol{\alpha}}_i}{\bar{\alpha}_{pi}}$.

证明：由关系(3.2.16)直接可得。证毕。

性质 6 $\bar{\alpha}_{ls}=-\bar{\alpha}_{ls}<0$，且 $0\leqslant\bar{\alpha}_{lj}<\alpha_{ls}$，$1\leqslant j\neq s\leqslant d$。

证明：由变换关系(3.2.13)和(3.2.14)，即得

$$\bar{\alpha}_{ls}=-\alpha_{ls}<0\text{(由 }l\text{ 的取法可知 }\alpha_{ls}>0\text{)}$$

$$\bar{\alpha}_{lj}=\alpha_{lj}-\left\lfloor\frac{\alpha_{lj}}{\alpha_{ls}}\right\rfloor\alpha_{ls},\ 1\leqslant j\neq s\leqslant d.$$

由

$$\left\lfloor\frac{\alpha_{lj}}{\alpha_{ls}}\right\rfloor\leqslant\frac{\alpha_{lj}}{\alpha_{ls}},\ \alpha_{ls}\left\lfloor\frac{\alpha_{lj}}{\alpha_{ls}}\right\rfloor\leqslant\alpha_{lj},$$

即得

$$\alpha_{lj}\geqslant 0,\ j\neq s.$$

又由于

$$\frac{\alpha_{lj}}{\alpha_{ls}}<\left\lfloor\frac{\alpha_{lj}}{\alpha_{ls}}\right\rfloor+1,$$

即得

$$\alpha_{ls}>\alpha_{lj}-\alpha_{ls}\left\lfloor\frac{\alpha_{lj}}{\alpha_{ls}}\right\rfloor=\bar{\alpha}_{lj}\geqslant 0,\ j\neq s.$$

证毕。

性质 7 若表达式

$$\boldsymbol{x}=\bar{\boldsymbol{\alpha}}_0+\sum_j\bar{\boldsymbol{\alpha}}_j(-\bar{t}_j)$$

的诱导行是按步骤 2.2.1，继续选为 l，则有

$$\alpha_{ls}>\bar{\alpha}_{\bar{l}s}>0.$$

证明:由性质 6 直接可得。证毕。

性质 7 说明任何的行只能连续有限次被选为诱导行。

定理 3.13 若整数规划问题(P)有最优解,则原始整数割平面程序必在有限步内终止。

证明:用反证法。因为当 $\theta_s\geqslant 1$ 时必有

$$\bar{\alpha}_{00}\geqslant \alpha_{00}+1.$$

因此,若问题有最优解,非退化情形只能出现有限次。故若过程无限,则计算到某一步后,必都为退化情形,即所有的 $\theta_s<1$。因此,从某一步以后,所有的 $\{\alpha_{i0}\}$ 将保持定值 u_{i0}, $i=0,1,\cdots,n$。下面将由此来导出矛盾。

由性质 5,可知向量序列

$$\left\{\frac{1}{\alpha_{ps}}\boldsymbol{\alpha}_s\right\}=\left\{\frac{1}{\alpha^1_{ps_1}}\alpha^1_{s_1},\ \frac{1}{\alpha^2_{ps_2}}\alpha^2_{s_2},\cdots\right\}$$

按字典序单调上升。考虑数列

$$\{\alpha_{ps}\}=\{\alpha^1_{ps_1},\ \alpha^2_{ps_2},\cdots\}.$$

假设在某一步以后恒有关系

$$\alpha_{ps}>\alpha_{p0}=u_{p0},$$

则由性质 7 和 p 行优先被选为诱导行的步骤2.2.2,必将在某一步选取 $l=p$。再根据步骤 2.2.1 和性质 7,经过有限步后,就要出现

$$\alpha_{ps}\leqslant\alpha_{p0}=u_{p0},$$

自相矛盾。因此,数列$\{\alpha_{ps}\}$中,必有无穷多项使得

$$0<\alpha_{ps}\leqslant\alpha_{p0}=u_{p0}.$$

因为区间$[0,u_{p0}]$中,只有有限多个不同的整数,故数列$\{\alpha_{ps}\}$中必存在一个取固定值的子数列$\{\alpha'_{ps}\}$。对此子数列而言,因为对应的$\{\alpha'_{0s}\}$都是负整数,且子数列$\left\{\frac{\alpha'_{0s}}{\alpha'_{ps}}\right\}$又是非降的,故在某一步后,$\left\{\frac{\alpha'_{0s}}{\alpha'_{ps}}\right\}$必保持固定的值不变。又由于原序列$\left\{\frac{\alpha_{0s}}{\alpha_{ps}}\right\}$也是非降的,故在某一步 k_0 后,$\left\{\frac{\alpha_{0s}}{\alpha_{ps}}\right\}$保持固定的值不变。

从 k_0 步以后,$\frac{1}{\alpha_{ps}}\boldsymbol{\alpha}_s$ 的 2 个分量$\frac{\alpha_{1s}}{\alpha_{ps}}$就构成一非降数列$\left\{\frac{\alpha_{1s}}{\alpha_{ps}}\right\}$。根据步骤 2.2.3 和性质 7,容易证明,在 k_0 步以后,必有

$$\frac{\alpha_{1s}}{\alpha_{ps}}\leqslant u_{10},$$

以及

$$\frac{\alpha'_{1s}}{\alpha'_{ps}}\leqslant u_{10}.$$

因而$\{\alpha'_{1s}\}$是一个非降的有上界的整数序列,故在某一步以后,必取定值不变。即在某一步

后，$\left\{\frac{\alpha'_{1s}}{\alpha'_{ps}}\right\}$必保持固定的值不变。再由于原序列$\left\{\frac{\alpha_{1s}}{\alpha_{ps}}\right\}$的非降性，就可推知在某一步以后，数列$\left\{\frac{\alpha_{1s}}{\alpha_{ps}}\right\}$也保持固定的值不变。对$\left\{\frac{\alpha_{2s}}{\alpha_{ps}}\right\}$，$\left\{\frac{\alpha_{3s}}{\alpha_{ps}}\right\}$…重复进行上述论证，就可推得序列$\left\{\frac{\boldsymbol{\alpha}_s}{\alpha_{ps}}\right\}$在有限步后，保持固定向量不变，这就矛盾于性质 5。证毕。

【例 3.2】 求

$$\max x_0 = 3x_1 - x_2,$$

满足

$$\begin{aligned} &x_3 = 5 - 2x_1 + x_2, \\ &x_4 = x_1 - x_2, \\ &x_5 = 21 - 8x_1 + 2x_2, \\ &x_1, x_2, \cdots, x_5 \geqslant 0, \\ &x_0, x_1, \cdots, x_5 \text{ 取整数}. \end{aligned}$$

表 3.8～3.11 是利用原始整数割平面方法的计算过程。特殊行取 P 为 x_s 的表达式。计算过程如图 3.3 中点①→②→③。

表 3.8

			$-x_1$	$-x_2$
	x_0	0	−3	1
#	x_3	5	2	−1
	x_4	0	−1	1
$P\to$	x_5	21	8	−2
	x_1	0	−1	0
	x_2	0	0	−1
	x_3	2	1	−1

表 3.9

		$-s_3$	$-x_2$
0	6	3	−2
x_3	1	−2	1
x_4	2	1	0
# x_5	5	−8	6
x_1	2	1	−1
x_2	0	0	−1
x_5	0	−2	1

表 3.10

			$-s_3$	$-s_5$
	x_0	6	−1	2
	x_3	1	0	−1
	x_4	2	1	0
#	x_5	5	4	−6
	x_1	2	−1	1
	x_2	0	−2	1
	s'_5	1	1	−2

表 3.11

		$-s'_5$	$-s_5$
x_0	7	1	0
x_3	1	0	−1
x_4	1	−1	2
x_5	1	−4	2
x_1	3	1	−1
x_2	2	2	−3

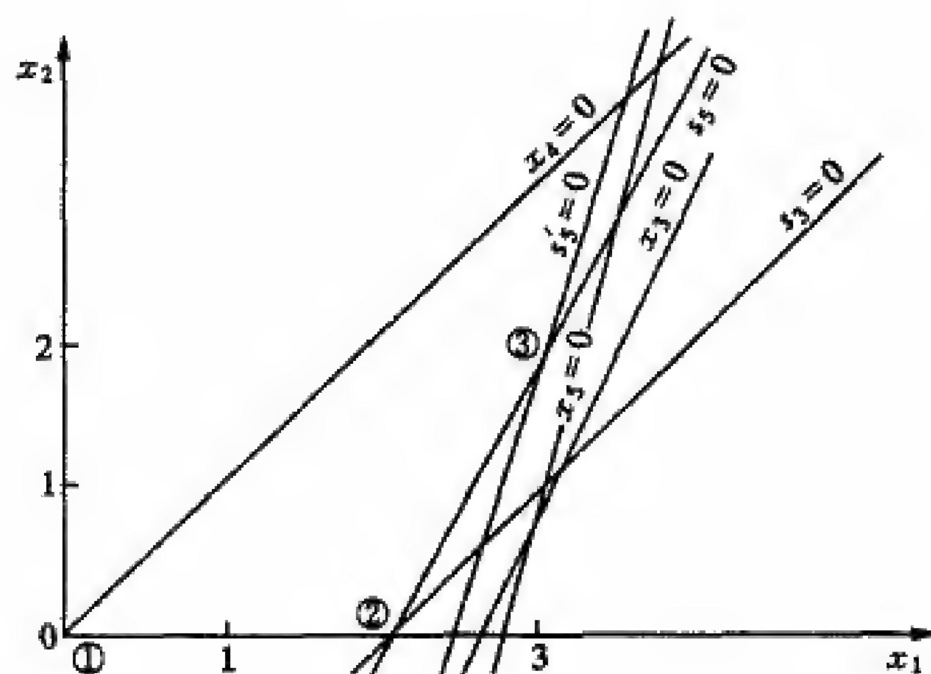


图 3.3

3.3 线性混合整数规划的割平面方法

线性混合整数规划问题的标准形式为

求
$$\max x_0 = \sum_{j=1}^{r} c_j x_j + \sum_{j=r+1}^{n} c_j x_j + C_0 \tag{3.3.1}$$

满足条件

$$\sum_{j=1}^{r} a_{ij} x_j + \sum_{j=r+1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i,\ i = 1, \cdots, m, \tag{3.3.2}$$

$$x_j \geqslant 0,\ j = 0, 1, \cdots, n, \tag{3.3.3}$$

$$x_j \text{ 取整数}, j = 0, 1, \cdots, r. \tag{3.3.4}$$

记

$(MP) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}$ 满足条件(3.3.2),(3.3.3)$\}$,

$(MS) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}$ 满足条件(3.3.2),(3.3.3),(3.3.4)$\}$,

$$\boldsymbol{C}^1 = (C_1, \cdots, C_r),\ \boldsymbol{C}^2 = (C_{r+1}, \cdots, C_n),$$

$$\boldsymbol{A}^1 = \begin{pmatrix} a_{11}, & \cdots, & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}, & \cdots, & a_{mr} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{P}_1, \cdots, \boldsymbol{P}_r),$$

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} a_{1r+1}, & \cdots, & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{mr+1}, & \cdots, & a_{mn} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{P}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{P}_n),$$

$$\boldsymbol{x}^1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}^2 = \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

则问题(3.3.1)~(3.3.4)可以写成如下的矩阵形式,

求
$$\max x_0 = \boldsymbol{C}^1 \boldsymbol{x}^1 + \boldsymbol{C}^2 \boldsymbol{x}^2 + C_0,$$

满足条件

$$\boldsymbol{A}^1 \boldsymbol{x}^1 + \boldsymbol{A}^2 \boldsymbol{x}^2 \leqslant \boldsymbol{b},$$

$$x_j \geqslant 0,\ j = 0, 1, \cdots, n,$$

$$x_j \text{ 取整数}, j = 0, 1, \cdots, r.$$

定理 3.14 对任意的 $i, 1 \leqslant i \leqslant m$,以及任意的有理数 $\lambda > 0$,条件

$$\sum_{j=1}^{r} \lfloor \lambda a_{ij} \rfloor x_j + \frac{1}{1 - f_i} \sum_{j \in J} \lambda a_{ij} x_j \leqslant \lfloor \lambda b_i \rfloor \tag{3.3.5}$$

是(MS)的一个分离。即 $x \in (MS) \Rightarrow x$ 满足条件(3.3.5)。

其中

$$J = \{ j \mid r + 1 \leqslant j \leqslant n,\ a_{ij} < 0 \},$$

$$f_i = \lambda b_i - \lfloor \lambda b_i \rfloor.$$

证明:对任意的 $x \in (MS)$,若

(ⅰ)
$$\sum_{j=r+1}^{n} \lambda a_{ij} x_j > f_i - 1,$$

则

$$\sum_{j=1}^{r} \lfloor \lambda a_{ij} \rfloor x_j \leqslant \sum_{j=1}^{r} \lambda a_{ij} x_j \leqslant \lambda b_i - \sum_{j=r+1}^{n} \lambda a_{ij} x_j < \lambda b_i - (f_i - 1) = \lfloor \lambda b_i \rfloor + 1$$

由于上式左端是整数,故必有

$$\sum_{j=1}^{r} \lfloor \lambda a_{ij} \rfloor x_j \leqslant \lfloor \lambda b_i \rfloor. \tag{3.3.6}$$

又因为

$$\frac{1}{1 - f_i} \sum_{j \in J} \lambda a_{ij} x_j \leqslant 0.$$

所以

$$\sum_{j=1}^{r} \lfloor \lambda a_{ij} \rfloor x_j + \frac{1}{1 - f_i} \sum_{j \in J} \lambda a_{ij} x_j \leqslant \lfloor \lambda b_i \rfloor.$$

(ⅱ)若 $\sum_{j=r+1}^{n} \lambda a_{ij} x_j \leqslant f_i - 1$,则

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{r} \lfloor \lambda a_{ij} \rfloor x_j + \frac{1}{1 - f_i} \sum_{j \in J} \lambda a_{ij} x_j &\leqslant \sum_{j=1}^{r} \lambda a_{ij} x_j + \frac{1}{1 - f_i} \sum_{j \in J} \lambda a_{ij} x_j \\
&\leqslant \lambda b_i - \sum_{j=r+1}^{n} \lambda a_{ij} x_j + \frac{1}{1 - f_i} \sum_{j \in J} \lambda a_{ij} x_j \\
&\leqslant \lambda b_i - \sum_{j \in J} \lambda a_{ij} x_j + \frac{1}{1 - f_i} \sum_{j \in J} \lambda a_{ij} x_j \\
&= \lambda b_i + \left(\sum_{j \in J} \lambda a_{ij} x_j \right) \left(\frac{1}{1 - f_i} - 1 \right) \\
&= \lambda b_i + \frac{f_i}{1 - f_i} \left(\sum_{j \in J} \lambda a_{ij} x_j \right) \\
&\leqslant \lambda b_i + \frac{f_i}{1 - f_i} \left(\sum_{j=r+1}^{n} \lambda a_{ij} x_j \right) \\
&\leqslant \lambda b_i - f_i \\
&= \lfloor \lambda b_i \rfloor.
\end{aligned}$$

证毕。

如 2.8 节中所述，假设线性混合整数规划问题已表示成如下的参数形式

求 max

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \alpha_{00} + \sum_j \alpha_{0j}(-t_j), \\ x_1 &= \alpha_{10} + \sum_j \alpha_{1f}(-t_j), \\ &\vdots \\ x_r &= \alpha_{r0} + \sum_j \alpha_{rj}(-t_j), \\ x_{r+1} &= \alpha_{r+10} + \sum_j \alpha_{r+1\,j}(-t_j), \\ &\vdots \\ x_n &= \alpha_{n0} + \sum_j \alpha_{nj}(-t_j), \end{aligned}\right\} \tag{3.3.7}$$

假设应用字典序单纯形算法，已求得线性规划问题(3.3.1)～(3.3.3)的最优解，并且不妨假设，(3.3.7)便是达到最优时的表达式。因此有

$$\alpha_{i0} \geqslant 0, \ i = 0, 1, \cdots, n,$$

$$\alpha_{oj} \geqslant 0, \ j = 1, 2, \cdots, d.$$

这时，假设进一步，α_{00}，α_{10}，…，α_{r0}都是整数，那么 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha}_0$ 便是问题(3.3.1)～(3.3.4)的最优解。相反，设

$$l = \min\{i \mid \alpha_{i0}\text{不是整数}, 0 \leqslant i \leqslant r\}.$$

称条件

$$x_l = \alpha_{l0} + \sum_j \alpha_{lj}(-t_j) \tag{3.3.8}$$

为诱导方程。下面介绍混合整数规划的 Gomory 割平面。

定义

$$I = \{j \mid t_j \text{ 是整数变量}, \ 0 \leqslant j \leqslant d\},$$

$$J = \{j \mid t_j \text{ 不是整数变量}, \ 0 \leqslant j \leqslant d\},$$

$$\alpha_{l0} = \lfloor \alpha_{l0} \rfloor + r_{l0},$$

$$\alpha_{lj} = \lfloor \alpha_{lj} \rfloor + r_{lj}, \ j \in I,$$

$$I_1 = \{j \in I \mid r_{lj} \leqslant r_{l0}\},$$

$$I_2 = \{j \in I \mid r_{lj} > r_{l0}\},$$

$$J_1 = \{j \in J \mid \alpha_{lj} \geqslant 0\},$$

$$J_2 = \{j \in J \mid \alpha_{lj} < 0\},$$

则诱导方程(3.3.8)可写为

$$x_l = \lfloor \alpha_{l0} \rfloor + r_{l0} + \sum_{j \in I_1} \lfloor \alpha_{lj} \rfloor (-t_j) + \sum_{j \in I_2} \{\lfloor \alpha_{lj} \rfloor + 1\}(-t_j) + \sum_{j \in I_1} r_{lj}(-t_j) + \sum_{j \in I_2} (r_{lj} - 1)(-t_j) + \sum_{j \in J_1} \alpha_{lj}(-t_j) + \sum_{j \in J_2} \alpha_{lj}(-t_j)$$

移项整理后可写为

$$-r_{l0}+\sum_{j\in I_1}r_{lj}t_j+\sum_{j\in I_2}(r_{lj}-1)t_j+\sum_{j\in J_1}\alpha_{lj}t_j+\sum_{j\in J_2}\alpha_{lj}t_j$$
$$=-x_l+\lfloor\alpha_{l0}\rfloor+\sum_{j\in I_1}\lfloor\alpha_{lj}\rfloor(-t_j)+\sum_{j\in I_2}\{\lfloor\alpha_{lj}\rfloor+1\}(-t_j)$$

当 $x_l, x_j(j\in I)$取整数时，上式右边必取整数。因此，左边也必取整数。即

$$s=-r_{l0}+\sum_{j\in I_1}r_{lj}t_j+\sum_{j\in I_2}(r_{lj}-1)t_j+\sum_{j\in J_1}\alpha_{lj}t_j+\sum_{j\in J_2}\alpha_{lj}t_j$$

必取整数。

(ⅰ) 若 s 取非负整数，则有

$$\sum_{j\in I_1}r_{lj}t_j+\sum_{j\in J_1}\alpha_{lj}t_j\geqslant r_{l0} \tag{3.3.9}$$

(ⅱ) 若 s 取负整数，则有

$$\sum_{j\in I_2}(r_{lj}-1)t_j+\sum_{j\in J_2}\alpha_{lj}t_j\leqslant -1+r_{l0}.$$

两边用$\dfrac{1}{-1+r_{l0}}r_{10}$相乘后得

$$\sum_{j\in I_2}\frac{r_{lj}-1}{r_{l0}-1}r_{l0}t_j+\sum_{j\in J_2}\frac{\alpha_{lj}}{r_{l0}-1}r_{l0}t_j\geqslant r_{l0}. \tag{3.3.10}$$

因为不等式(3.3.9)和(3.3.10)中，t_j 的系数都是正的，故对诱导方程(3.3.8)的任意非负整数解，必满足不等式

$$\sum_{j\in I_1}r_{lj}t_j+\sum_{j\in I_2}\frac{r_{lj}-1}{r_{l0}-1}r_{l0}t_j+\sum_{j\in J_1}\alpha_{lj}t_j+\sum_{j\in J_2}\frac{\alpha_{lj}}{r_{l0}-1}r_{l0}t_j\geqslant r_{l0}$$

引进松弛变量 s_l^* 后，上式可写为

$$s_l^*=-f_{l0}+\sum_j(-f_{lj})(-t_j)\geqslant 0, \tag{3.3.11}$$

其中

$$f_{l0}=r_{l0}$$
$$f_{lj}=\begin{cases} r_{lj}, & j\in I_1\\ \dfrac{r_{lj}-1}{r_{l0}-1}r_{l0}, & j\in I_2,\\ \alpha_{lj}, & j\in J_1,\\ \dfrac{\alpha_{lj}}{r_{l0}-1}r_{l0}, & j\in J_2,\end{cases} \tag{3.3.12}$$

称(3.3.11)为混合整数规划的 Gomory 割平面。

定理 3.15 假设表达式

$$\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{\alpha}_0+\sum_j\boldsymbol{\alpha}_j(-t_j)$$

满足 $\boldsymbol{\alpha}_j\succ 0,\ j\neq 0$。假设 α_{00}不是整数。诱导方程取为

$$x=\alpha_{00}+\sum_j\alpha_{0j}(-t_j),$$

割平面条件为

$$s_0^* = -f_{00} + \sum_j (-f_{0j})(-t_j),$$

设按字典序单纯形算法，用 s_0^* 替换参变量 t_s 后的表达式为

$$\boldsymbol{x} = \bar{\boldsymbol{\alpha}}_0 + \sum_j \bar{\boldsymbol{\alpha}}_j(-\bar{t}_j),$$

则有

$$\bar{\alpha}_{00} \leqslant \lfloor \alpha_{00} \rfloor.$$

证明：若

（ⅰ）t_s 不是整数变量。则有

$$\bar{\alpha}_{00} = \alpha_{00} - \frac{f_{00}}{f_{0s}}\alpha_{0s} = \alpha_{00} - \frac{r_{00}}{r_{0s}}\alpha_{0s} = \lfloor \alpha_{00} \rfloor.$$

（ⅱ）t_s 是整数变量，且 $r_{0s} \leqslant r_{00}$（即 $s \in I_1$）。则有

$$\bar{\alpha}_{00} = \alpha_{00} - \frac{f_{00}}{f_{0s}}\alpha_{0s} = \alpha_{00} - \frac{r_{00}}{r_{0s}}\alpha_{0s} \leqslant \alpha_{00} - r_{00} = \lfloor \alpha_{00} \rfloor.$$

（ⅲ）$s \in I_2$，则有

$$\bar{\alpha}_{00} = \alpha_{00} - \frac{1-r_{00}}{1-r_{0s}}\alpha_{0s} < \alpha_{00} - \alpha_{0s} \leqslant \alpha_{00} - r_{0s} < \alpha_{00} - r_{00} = \lfloor \alpha_{00} \rfloor.$$

证毕。

和线性整数规划的分数割平面程序完全相类似地可以建立线性混合整数规划的割平面算法。类似地，利用性质 $\boldsymbol{\alpha}_0^k \succ \boldsymbol{\alpha}_0^{k+1} \succ 0$，以及定理 3.15，可以证明，必存在某指标 k_0，使得当 $k \geqslant k_0$ 时，α_{00}^k保持某整数不变。此后，就可将定理 3.15 应用到数列$\{\alpha_{10}^k\}$。同样，必存在某指标 $k_1 \geqslant k_2$，使得当 $k \geqslant k_1$ 时，α_{00}^k和 α_{10}^k保持某整数不变。依此类推，就可证明算法必在有限步内终止。

【例 3.3】 求 $\max\ x_0 = -4x_2 - 10x_4 + 20$，

满足

$$x_1 - \frac{5}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4 = \frac{5}{3},$$

$$-\frac{4}{3}x_2 + x_3 + \frac{11}{3}x_4 = \frac{7}{3},$$

$$x_1, x_2, x_3, x \geqslant 0,$$

$$x_0, x_3, x_4 \text{ 取整数}.$$

它的松弛线性规划问题的最优解为表 3.12 所示。

表 3.12

		$-t_1$	$-t_2$
x_0	20	4	10
x_3	7/3	-4/3	11/3
x_4	0	0	-1
x_1	5/3	-5/3	-1/3
x_2	0	-1	0

诱导方程为

$$x_3=\frac{7}{3}-\frac{4}{3}(-t_1)+\frac{11}{3}(-t_2)$$

$$=\frac{7}{3}-\frac{4}{3}(-x_2)+\frac{11}{3}(-x_4),$$

$$I=\{2\},\ J=\{1\},$$

$$r_{30}=\frac{1}{3},\ r_{32}=\frac{2}{3},$$

因此，

$$I_1=\phi,\ I_2=\{2\},$$

$$J_1=\phi,\ J_2=\{1\},$$

于是，

$$f_{30}=\frac{1}{3},f_{31}=\left[\left(-\frac{4}{3}\right)\Big/\left(\frac{1}{3}-1\right)\right]\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$$f_{32}=\left[\left(\frac{2}{3}-1\right)\Big/\left(\frac{1}{3}-1\right)\right]\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

混合割平面为

$$s_3^*=-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}(-t_1)-\frac{1}{6}(-t_2)$$

因为

$$\max\left\{\frac{4}{-\frac{2}{3}},\ \frac{10}{-\frac{1}{6}}\right\}=-6,$$

故得 $s=1$。用 s_3^* 替换参变量 t_1 后，得表 3.13。

表 3.13

		$-s_3^*$	$-t_2$
x_0	18	6	9
x_3	3	−2	4
x_4	0	0	−1
x_1	15/6	−5/2	1/12
x_2	1/2	−3/2	1/4

问题的最优解为

$$x_0=18,\ x_1=\frac{15}{6},\ x_2=\frac{1}{2},\ x_3=3,\ x_4=0.$$

习　题

1.设多面体

$S=\left\{x\in R^n \mid x=\sum_{i=1}^{\pi}\lambda_i x^i+\sum_{j=0}^{v}\mu_j y^j,\ \sum_{i=1}^{\mu}\lambda_i=1,\ 所有的\ \lambda_i\geqslant 0,\ \mu_j\geqslant 0\right\}\dim(S)=n.$

$P=\left\{(\pi,\pi_0)\mid \pi^{\mathrm T}=(\pi_1,\cdots,\pi_n)^{\mathrm T}\in R^n,\pi_0\in R^1,\ \pi y^j\leqslant 0,\ \pi x^i\leqslant\pi_0,\right.$

(对所有的 y^j 和 x^i), $-1\leqslant \pi_k\leqslant 1$, $(k=0,1,\cdots,n)\}$

设 P 的所有顶点为(π^l,π_0^l), $(l=1,\cdots,m)$.

求证: $$S=\{x\mid \pi^l x\leqslant \pi_0^l,\ l=1,\cdots,m\}.$$

2. 设 x^0 是多面体

$$P=\{x\in R_+^n\mid Ax\leqslant b\}$$

中的任一顶点, $x_j^0=\frac{p_j}{q}(j=1,\cdots,n)$, 其中的 q 和 p_j 都是非负整数。设

$$\theta_A=\max_{i,j}|a_{ij}|,\ \theta_b=\max_i|b_i|.$$

求证:

$$0\leqslant p_j<n\theta_b(n\theta_A)^{n-1},$$
$$1\leqslant q<(n\theta_A)^n,$$
$$x_j^0<n\theta_b(n\theta_A)^{n-1}.$$

3. 设 $A=(a_{ij})$是一个 $m\times n$ 的整数矩阵。设

$$\theta_A=\max_{i,j}|a_{ij}|.$$

若 $$S=\{r\in Z_+^n\mid r\neq 0,\ Ar=0,\ r_j\leqslant(\theta_A n)^n,\ j=1,\cdots,n\}=\phi,$$

则 $$Q=\{u^T\in R^m\mid uA\geqslant 1,\ u_i\leqslant m(\theta_A m)^{m-1},\ i=1,\cdots,m\}\neq\phi.$$

4. 设 $A=(a_{ij})$是一个 $m\times n$ 的整数矩阵, $b\in Z^m$

$$\theta_A=\max_{i,j}|a_{ij}|,\ \theta_b=\max_i|b_i|.$$
$$S=\{x\in Z_+^n\mid Ax\leqslant b\}\neq\phi,$$
$$\bar{S}=\{x\in Z_+^n\mid Ax=b\}\neq\phi,$$

(i) 求证:存在 $x\in\bar{S}$, 使得

$$x_j\leqslant\bar{w}=m^2(\theta_A m)^{m-1}(\theta_b+(\theta_A n)^{n+1}),\ j=1,\cdots,n.$$

(ii) 求证:存在 $x\in S$, 使得

$$x_j\leqslant w\leqslant m^2(\theta_A m)^{m-1}(\theta_b+(\theta_A(m+n))^{n+m+1}),\ j=1,\cdots,n.$$

(iii) 设 $Z_{IP}=\max\{cx\mid x\in S\}<+\infty$, $\theta_c=\max_j|c_j|$, 求证: $|Z_{IP}|\leqslant n\theta_c w$.

(iv) 设问题: $\max\{cx\mid x\in S\}$ 有解, 记

$$t=\max\{m+2,n\},$$
$$\theta=\max\{\theta_A,\ \theta_b,\ \theta_c\},$$

则必存在一个最优解 x, 使得

$$x_j\leqslant t^2(\theta t)^{2t-2}(t+2t^2(2\theta t)^{2t-2}+2^{t-1}(2\theta t)^{t+2}),\ j=1,2,\cdots,n$$

5. 设

$$S=\left\{x\in Z^n\,\middle|\,\sum_{j=1}^n a_j x_j\leqslant a_0\right\},$$
$$a_j\in Z^1,\ j=0,1,\cdots,n,$$
$$k=\text{g.c.d.}\{a_1,\cdots,a_n\},$$

则

$$(S)^\Delta=\left\{x\in R^n\,\middle|\,\sum_{j=1}^n\frac{a_j}{k}x_j\leqslant\left\lfloor\frac{a_0}{k}\right\rfloor\right\}.$$

6. 仿照线性整数规划的分数割平面算法,建立线性混合整数规划的割平面算法。并证明算法的收敛性。进一步,当目标函数 x_0 不要求一定取整数值时,如何应用割平面算法求解?

7. 记

$$\tilde{Z}_+ = \left\{ z \mid z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ x \in Z^r_+,\ y \in R^l_+ \right\},$$

$$S = \{ z \mid z \in \tilde{Z}_+,\ Ax + Dy \leqslant b \},$$

$$(S)^{\Delta} = \left\{ w \mid w = \sum_{Z \in U} \alpha(z) z,\ \sum_{Z \in U} \alpha(z) = 1,\ \alpha(z) \geqslant 0,\ U \subseteq S,\ |U| \text{有限} \right\}$$

证明:存在有限个 $\tilde{Z}_+$ 中的向量

$$z^i = \begin{pmatrix} x^i \\ y^i \end{pmatrix},\ i = 1, \cdots, h,$$

$$\bar{z}^j = \begin{pmatrix} \bar{x}^j \\ \bar{y}^j \end{pmatrix},\ j = 1, \cdots, f,$$

满足

$$Ax^i + Dy^i \leqslant b,\ i = 1, \cdots, h,$$

$$A\bar{x}^j + D\bar{y}^j \leqslant 0,\ j = 1, \cdots, f,$$

使得

$$(S)^{\Delta} = \left\{ z \mid z = \sum_{i=1}^{h} \alpha_i z^i + \sum_{j=1}^{f} \beta_j \bar{z}^j,\ \sum_{i=1}^{h} \alpha_i = 1,\ \text{所有的 } \alpha_i,\ \beta_j \geqslant 0 \right\}$$

4 分支定界和隐式枚举

4.1 分支定界法介绍

4.1.1 对称型流动推销员问题

在介绍如何用分支定界法求解整数规划之前，首先介绍什么是分支定界法，还是从流动推销员问题谈起。流动推销员问题本身就是整数规划问题。

【例 4.1】 已知 5 个城市 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 间的距离矩阵

$$\boldsymbol{D}=\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix}\begin{bmatrix} \infty & 11 & 1 & 17 & 2 \\ 11 & \infty & 23 & 1 & 3 \\ 1 & 23 & \infty & 10 & 8 \\ 17 & 1 & 10 & \infty & 6 \\ 2 & 3 & 8 & 6 & \infty \end{bmatrix}=(d_{ij})_{5\times5}$$

$$\quad v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4 \quad v_5$$

$d_{ij}=v_i$ 到 v_j 的距离。矩阵 $\boldsymbol{D}$ 是对称的：$d_{ij}=d_{ji}$，即从 v_i 到 v_j 的距离等于从 v_j 到 v_i 间的距离，$i,j=1,2,3,4,5$。

解题步骤如下：

(1) 先从两两间距离找出其中最短的 5 条：

$d_{13}(=1), d_{24}(=1), d_{15}(=2), d_{25}(=3), d_{45}(=6)$

$d_{13}+d_{24}+d_{15}+d_{25}+d_{45}=1+1+2+3+6=13$。

由于下标中 5 出现 3 次，所以这 5 条边不构成流动推销员问题的解。

(2) 考虑排除 d_{15}，即在不走 v_1v_5 边的前提下，选其他 5 条最短边，即选 v_1v_5 边除外的另 5 条最短边。实际上用 d_{35} 取代 d_{15}，而且 $d_{13}+d_{24}+d_{25}+d_{35}+d_{45}=19$，下标中 5 仍出现 3 次。

(3) 考虑保留 d_{15} 边，但在排除 d_{25} 边的前提下选 5 条最短边，得 $d_{13}+d_{15}+d_{24}+d_{35}+d_{45}=18$，下标中 5 仍出现 3 次。

(4) 考虑保留 d_{15}, d_{25}，排除 d_{45} 边，找 5 条最短边得 $d_{13}+d_{15}+d_{25}+d_{24}+d_{35}=15$，下标 5 仍出现 3 次。

(5) 保留 d_{15}, d_{25}，在排除 d_{45}, d_{35} 的条件下，找出最短的 5 条边：$d_{13}+d_{15}+d_{24}+d_{25}+d_{34}=17$。下标中 1,2,3,4,5 都出现两次，故得一最短的回路：$v_1\to v_3\to v_4\to v_2\to v_5\to v_1$，总长度为 17。搜索过程用图 4.1 表示比较直观。

图 4.1 中 15，$\overline{15}$ 分别表示选取 v_1v_5 边和排除 v_1v_5 边；$S_1(13,24,15,25,45)=13$，表示最短的 5 条边为 $d_{13}, d_{24}, d_{15}, d_{25}, d_{45}$，总长度为 13，其余类推。$S_5(13,15,24,25,34)=17$ 是可

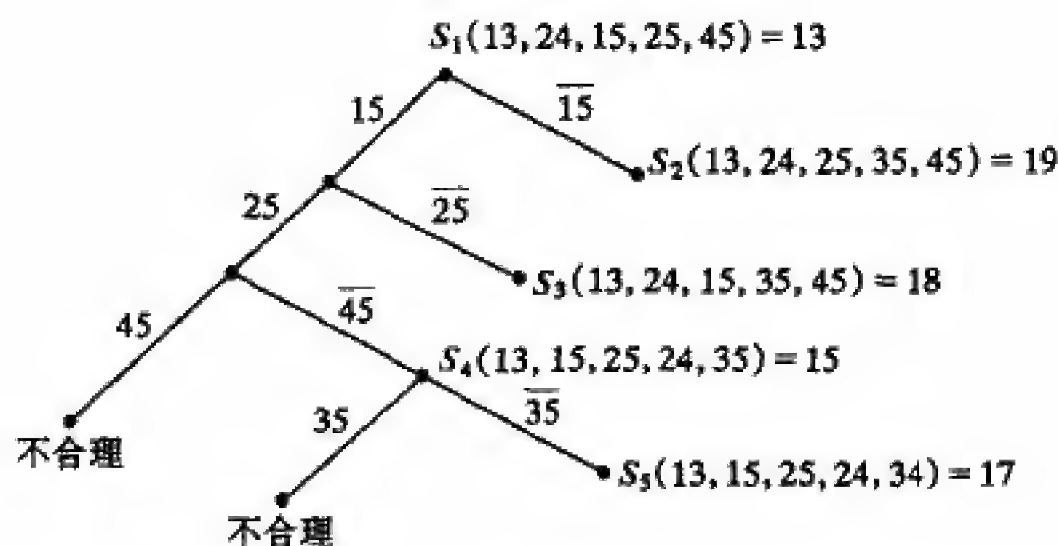


图 4.1

行解，总长度为 17，尽管不是回路，但 $S_2(13,24,25,35,45)=19$，$S_3(13,24,15,35,45)=18$，估界已超过 17，故没有搜索的价值，即选取 15 排除 25 或排除 15 都没有不超过 17 的解，故予以排除，无须搜索，从而 $S_5(13,15,24,25,34)=17$ 是最优解。

4.1.2　非对称型流动推销员问题

【例 4.2】　下面是距离矩阵为非对称的例子，即 d_{ij} 和 d_{ji} 未必相等。

$$\boldsymbol{D}=\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix}\begin{bmatrix} \infty & 14 & 30 & 5 & 6 \\ 10 & \infty & 11 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & \infty & 5 & 6 \\ 15 & 10 & 13 & \infty & 2 \\ 13 & 3 & 4 & 11 & \infty \end{bmatrix}$$
$$\qquad\qquad v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4 \quad v_5$$

对矩阵 $\boldsymbol{D}$ 每行元素减去该行的最小元素，每列减去该列的最小元素得一新的矩阵，这样得到的新矩阵每行每列都至少有一个 0 元素。

$$\begin{bmatrix} \infty & 14 & 30 & 5 & 6 \\ 10 & \infty & 11 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & \infty & 5 & 6 \\ 15 & 10 & 13 & \infty & 2 \\ 13 & 3 & 4 & 11 & \infty \end{bmatrix}\begin{matrix} 5 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}\xrightarrow[\text{行最小元素}]{\text{各行减该}}\begin{bmatrix} \infty & 9 & 25 & 0 & 1 \\ 7 & \infty & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & \infty & 1 & 2 \\ 13 & 8 & 11 & \infty & 0 \\ 10 & 0 & 1 & 8 & \infty \end{bmatrix}_{17}$$

$$\xrightarrow[\text{最小元素 1}]{\text{第 3 列减}}\begin{bmatrix} \infty & 9 & 24 & 0 & 1 \\ 7 & \infty & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & \infty & 1 & 2 \\ 13 & 8 & 10 & \infty & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 8 & \infty \end{bmatrix}_{18}$$

矩阵右下方的数是各行(各列)最小元素之和，例如 $17=5+3+4+2+3$。

若将矩阵 $\boldsymbol{D}$ 理解为旅费矩阵，则第 1 行诸元素减去最小元素 5，第 2 行减去最小元素 3，…，可以理解为从 v_1 出发到 v_2, v_3, v_4, v_5 的旅费一律减价 5 单位，从 v_2 出发的旅费一律减价 3，…。第 3 列的元素减该列最小元素 1，相当于进入 v_3 的旅费一律减 1。由于流动推销员进出各点各一次，所以原来问题的最优解也一定是后面矩阵 $\boldsymbol{D}_1$ 的最优解。问题变为求距离

矩阵

$$D_1=\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}\begin{bmatrix} \infty & 9 & 24 & 0 & 1 \\ 7 & \infty & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & \infty & 1 & 2 \\ 13 & 8 & 10 & \infty & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 8 & \infty \end{bmatrix}_{18}$$
$$\qquad v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4 \quad v_5$$

的最短路径问题。

若流动推销员从 v_1 出发，下一站选 v_4，因 $\boldsymbol{D}_1$ 中第 1 行第 4 列的元素为 0，从 $\boldsymbol{D}_1$ 中划去第 1 行第 4 列，因排除再从 v_1 出发，及再进入 v_4 的可能，并将 d_{41} 改为∞，以排除 $v_4\to v_1$ 的可能。

$$D_2=\begin{array}{c} v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}\begin{bmatrix} 7 & \infty & 7 & 0 \\ 0 & 2 & \infty & 2 \\ \infty & 8 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & \infty \end{bmatrix}_{18}$$
$$\qquad v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_5$$

从 v_4 出发应选路径 $v_4\to v_5$，因 $d_{45}=0$，和上面方法类似，划去 v_4 行 v_5 列，并将 d_{45} 改为∞，得

$$D_3=\begin{array}{c} v_2 \\ v_3 \\ v_5 \end{array}\begin{bmatrix} 7 & \infty & 7 \\ 0 & 2 & \infty \\ 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{18}$$
$$\qquad v_1 \quad v_2 \quad v_3$$

但 $\boldsymbol{D}_3$ 的第 1 行无零元素，故该行减去最小元素 7，矩阵下脚改为 25，得

$$\begin{array}{c} v_2 \\ v_3 \\ v_5 \end{array}\begin{bmatrix} 0 & \infty & 0 \\ 0 & 2 & \infty \\ 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{25=18+7}$$
$$\qquad v_1 \quad v_2 \quad v_3$$

排除 $v_1\to v_4$ 边，即 $\boldsymbol{D}_1$ 矩阵中令 $d_{14}=\infty$，得

$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}\begin{bmatrix} \infty & 9 & 24 & \infty & 1 \\ 7 & \infty & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & \infty & 1 & 2 \\ 13 & 8 & 10 & \infty & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 8 & \infty \end{bmatrix}_{18}^{1} \Rightarrow \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}\begin{bmatrix} \infty & 8 & 23 & \infty & 0 \\ 7 & \infty & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \infty & 0 & 2 \\ 13 & 0 & 10 & \infty & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 7 & \infty \end{bmatrix}_{20}$$
$$\qquad v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4 \quad v_5 \qquad\qquad v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4 \quad v_5$$

同样的道理，$\boldsymbol{D}_2$ 矩阵。若排除 $v_4\to v_5$，应有

$$
\begin{array}{c}
v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\\ \\
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix}
7 & \infty & 7 & 0\\
0 & 2 & \infty & 2\\
\infty & 8 & 10 & \infty\\
10 & 0 & 0 & \infty
\end{bmatrix}_{18}\\
v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_5
\end{array}
\begin{array}{c} 8 \\ \end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{c}
v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\\ \\
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix}
7 & \infty & 7 & 0\\
0 & 2 & \infty & 2\\
\infty & 0 & 2 & \infty\\
10 & 0 & 0 & \infty
\end{bmatrix}_{26=18+8}\\
v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_5
\end{array}
$$

搜索的全过程见图 4.2,矩阵右上肩( )里的数是搜索的顺序。最佳路径是

$$v_1 \to v_4 \to v_5 \to v_2 \to v_3 \to v_1$$

全长 25,凡是估界低于 25 的则应继续搜索,高于 25 的界则没有搜索价值,道理显而易见,从而达到减少搜索时间的目的。

用于非对称矩阵的后一种方法也可以用于对称矩阵。

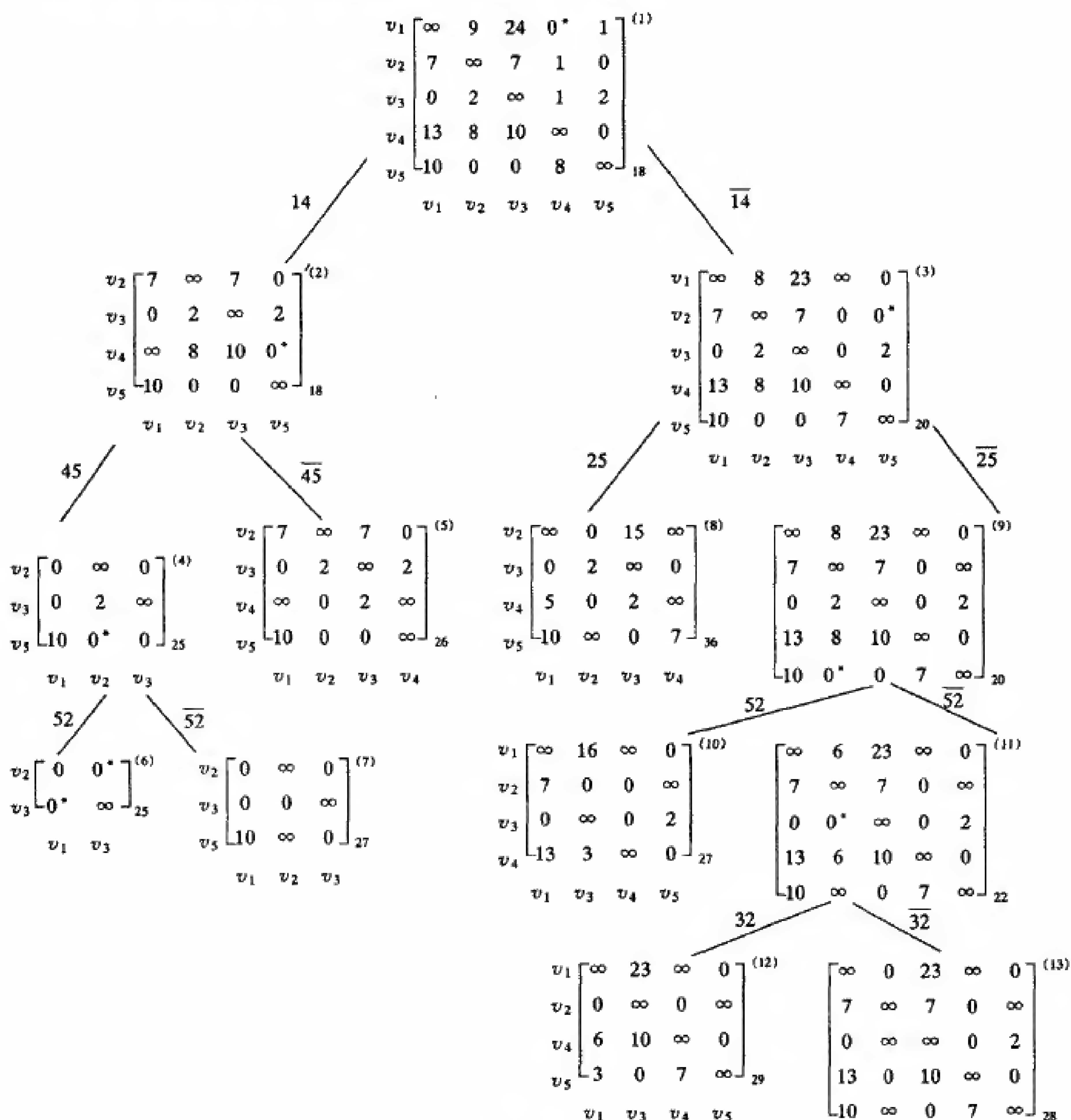


图 4.2

4.1.3 最佳匹配问题

最佳匹配也是整数规划问题,下面介绍用分支定界法求解。

【例 4.3】 若已知 A,B,C,D 四位工作人员从事 J_1,J_2,J_3,J_4 四项任务的代价矩阵为

$$C=\begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix}\begin{bmatrix} 99 & 6 & 59 & 73 \\ 79 & 15 & 93 & 87 \\ 67 & 93 & 13 & 81 \\ 16 & 79 & 86 & 26 \end{bmatrix}$$
$$\begin{matrix} J_1 & J_2 & J_3 & J_4 \end{matrix}$$

现将 J_1,J_2,J_3,J_4 四项任务分派给 A,B,C,D,每人一项,求最佳安排,使代价最小。在确定 A 从事 J_1 任务的前提下,寻找最低成本的界。从矩阵 C 中划去 A 行 J_1 列得

$$\begin{matrix} B \\ C \\ D \end{matrix}\begin{bmatrix} 15 & 93 & 87 \\ 93 & 13 & 81 \\ 79 & 86 & 26 \end{bmatrix}$$
$$\begin{matrix} J_2 & J_3 & J_4 \end{matrix}$$

结果:B 从事 J_2,C 从事 J_3,D 从事 J_4 最理想。因 J_2 列的最小元素为 15,J_3 列的最小元素为 13,J_4 列最小元素为 26。$99+15+13+26=153$,记作

$$\begin{pmatrix} Ⓐ & B & C & D \\ & 153 & & \end{pmatrix}$$

$ABCD$ 是一合理的分派,Ⓐ表示 A 是指定的分派,而不是搜索来的,其他是搜索来的。

用类似办法确定在 B 从事 J_1 任务的前提下,估界如下:划去 B 行 J_1 列得

$$\begin{matrix} A \\ C \\ D \end{matrix}\begin{bmatrix} 6 & 59 & 73 \\ 93 & 13 & 81 \\ 79 & 86 & 26 \end{bmatrix}$$
$$\begin{matrix} J_2 & J_3 & J_4 \end{matrix}$$

故有

$$\begin{pmatrix} Ⓑ & A & C & D \\ & 124 & & \end{pmatrix}$$

$BACD$ 是一种分派,但 124 较 153 更佳。

类似可得

$$\begin{pmatrix} Ⓒ & A & A & D \\ & 158 & & \end{pmatrix},\begin{pmatrix} Ⓓ & A & C & A \\ & 108 & & \end{pmatrix}$$

ⒸAAD 没有搜索价值,因它的界 $158>124$,但 ⒹACA 的界 $108<124$,必须进一步搜索。

在确定 D 从事 J_1 任务的前提下,分别确定 A,B,C 从事 J_2 任务,类似可得

$$\begin{pmatrix} Ⓓ & Ⓐ & C & C \\ & 116 & & \end{pmatrix},\begin{pmatrix} Ⓓ & Ⓑ & C & A \\ & 117 & & \end{pmatrix},\begin{pmatrix} Ⓓ & Ⓒ & A & A \\ & 242 & & \end{pmatrix}$$

显然,$\begin{pmatrix} Ⓓ & Ⓑ & C & A \\ & 117 & & \end{pmatrix}$ 是到目前为止找到的最佳指派,取代 $\begin{pmatrix} Ⓑ & A & C & D \\ & 124 & & \end{pmatrix}$,而

$\begin{pmatrix} Ⓓ & Ⓒ & A & A \\ & 242 & & \end{pmatrix}$则毫无搜索价值。但$\begin{pmatrix} Ⓓ & Ⓐ & C & C \\ & 116 & & \end{pmatrix}$似乎还需继续追查。

$$\begin{pmatrix} Ⓓ & Ⓐ & Ⓑ & C \\ & 196 & & \end{pmatrix},\begin{pmatrix} Ⓓ & Ⓐ & Ⓒ & B \\ & 122 & & \end{pmatrix}$$

都不及$\begin{pmatrix} Ⓓ & Ⓑ & C & A \\ & 117 & & \end{pmatrix}$优越，所以$\begin{pmatrix} Ⓓ & Ⓑ & C & A \\ & 117 & & \end{pmatrix}$，即 D 从事J_1，B 从事J_2，C 从事J_3，A 从事J_4是最佳的任务安排，代价为 117。搜索过程如图 4.3 所示。

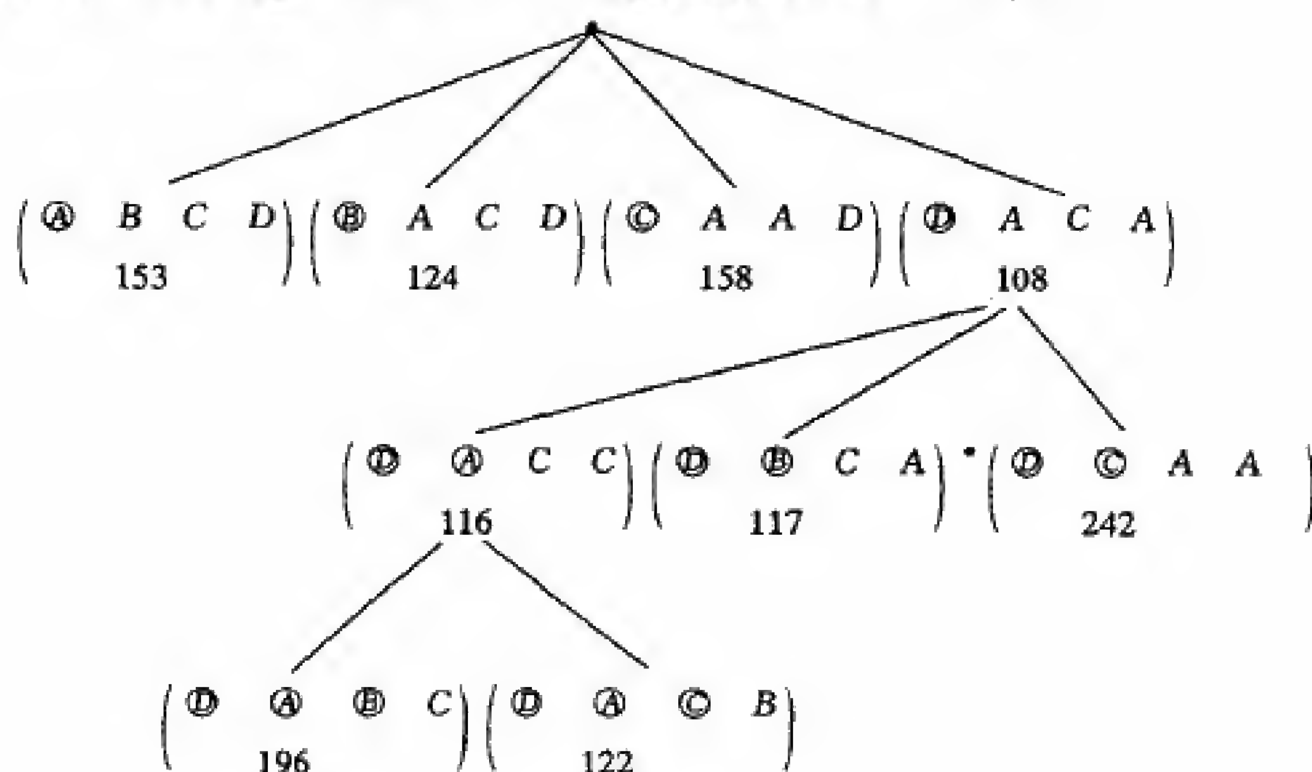


图 4.3

4.2 整数规划的分支定界解法

前面介绍了利用分支定界法求解流动推销员问题和任务安排问题。这两个问题都属整数规划范围。虽然对若干其他问题，分支定界法都显示出它的威力，但毕竟是针对具体内容设计的，对于一般整数规划问题，如何利用它是本节要讨论的内容。

先举一个简单例子。

【例 4.4】

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + \frac{3}{5}x_2 \leqslant 4\frac{1}{3}$$

$$-2x_1 + x_2 \leqslant 1$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0, \text{整数}$$

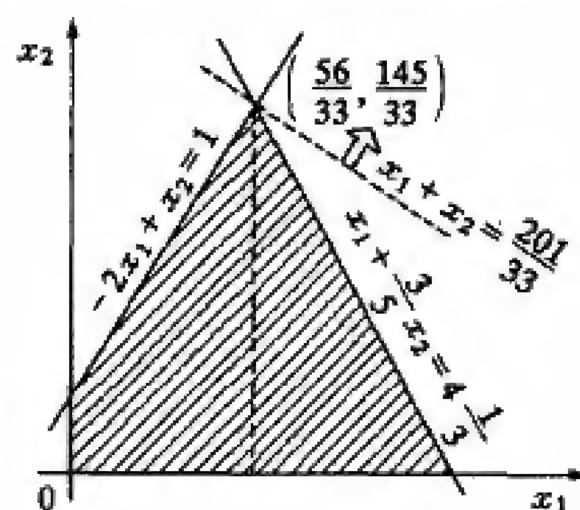


图 4.4

(1) 本问题作为线性规划问题图解如图 4.4 所示。

解得：

$$x_1 = \frac{56}{33}, x_2 = \frac{145}{33}, z = \frac{201}{33}$$

由于 $1 < x_1 < 2$，还须考虑下面两个问题。

(2)
$$\max z = x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + \frac{3}{5}x_2 \leqslant 4\frac{1}{3}$$

$$-2x_1+x_2\leqslant 1$$
$$0\leqslant x_1\leqslant 1,\ x_2\geqslant 0$$

结果：$x_1=1,x_2=3,z_1=4$

$$\max\ z=x_1+x_2$$
$$\text{s.t.}\quad x_1+\frac{3}{5}x_2\leqslant 4\frac{1}{3}$$
$$-2x_1+x_2\leqslant 1$$
$$x_1\geqslant 2,\ x_2\geqslant 0$$

结果：$x_1=2,x_2=3\frac{8}{9},z_2=5\frac{8}{9}$

由于 $z_2>z_1$，故先搜索 $x_1\geqslant 2$。z_1 和 z_2 分别给出位于 $0\leqslant x_1\leqslant 1$，$x_1\geqslant 2$ 两部分解的界，又由于 $3\leqslant x_2\leqslant 4$，故分别考虑。

(3)

$$\max\ z=x_1+x_2$$
$$\left.\begin{aligned}\text{s.t.}\quad x_1+\frac{3}{5}x_2&\leqslant 4\frac{1}{3}\\ -2x_1+x_2&\leqslant 1\end{aligned}\right\}\qquad(4.2.1)$$
$$x_1\geqslant 2,0\leqslant x_2\leqslant 3$$

解：$x_1=2\frac{8}{15},x_2=3,z=5\frac{8}{15}$

$$\max\ z=x_1+x_2$$
$$\text{s.t.}\quad x_1+\frac{3}{5}x_2\leqslant 4\frac{1}{3}$$
$$-2x_1+x_2\leqslant 1$$
$$x_1\geqslant 2,\ x_2\geqslant 4$$

问题无解。

由于(4.2.1)的解：$2\leqslant x_1\leqslant 3$，故又分成下面的两个问题。

(4)

$$\max\ z=x_1+x_2$$
$$\text{s.t.}\quad x_1+\frac{3}{5}x_2\leqslant 4\frac{1}{3}$$
$$-2x_1+x_2\leqslant 1$$
$$x_1=2,0\leqslant x_2\leqslant 3$$
$$x_1=2,\ x_2=3,\ z=5$$

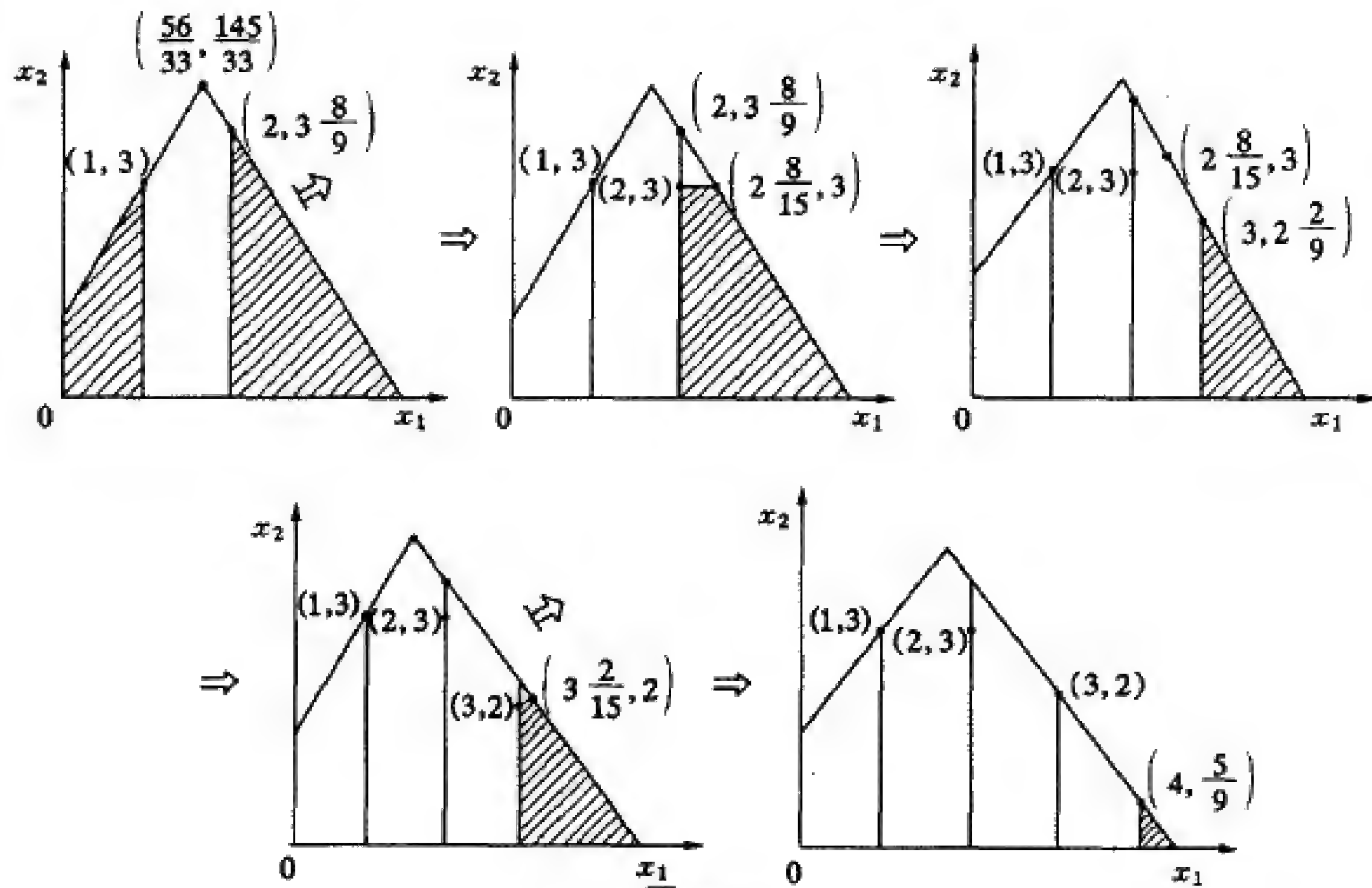
若对于约束

$$x_1\geqslant 3,\ 0\leqslant x_2\leqslant 3$$

其结果为：$x_1=3,x_2=2\frac{2}{9},z=5\frac{2}{9}$。$x_1$ 和 x_2 给出搜索到目前为止最好的整数解，取代 $x_1=1,x_2=3,z=4$。

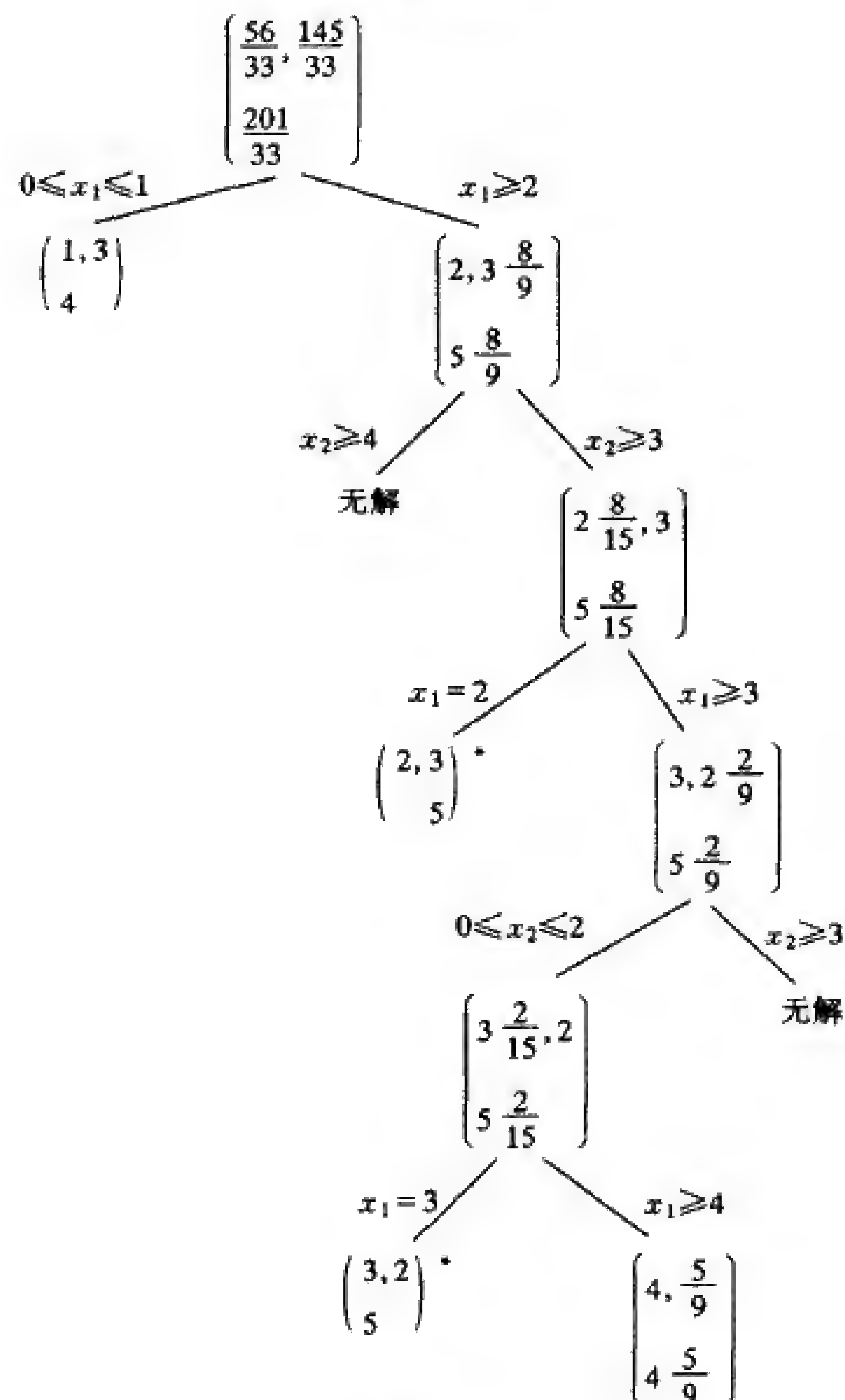
搜索到此可以结束了，因为 $z=5\frac{2}{9}$ 虽然比 z 大，但若考虑到是整数解，充其量也不过是 $z=5$。

搜索全部结束了，它的全过程从图 4.5 和图 4.6 中可以一目了然。



x_2
$\left(\frac{56}{33},\frac{145}{33}\right)$
$\left(2,3\frac{8}{9}\right)$
(1, 3)
x_1
0
(2, 3)
$\left(2\frac{8}{15},3\right)$
$\left(3,2\frac{2}{9}\right)$
$\left(3\frac{2}{15},2\right)$
(3,2)
$\left(4,\frac{5}{9}\right)$

图 4.5



$\frac{56}{33},\frac{145}{33}$
$\frac{201}{33}$
$0\leqslant x_1\leqslant 1$
$x_1\geqslant 2$
1, 3
4
$2,3\frac{8}{9}$
$5\frac{8}{9}$
$x_2\geqslant 4$
$x_2\geqslant 3$
无解
$2\frac{8}{15},3$
$5\frac{8}{15}$
$x_1=2$
$x_1\geqslant 3$
2, 3
5
$3,2\frac{2}{9}$
$5\frac{2}{9}$
$0\leqslant x_2\leqslant 2$
$x_2\geqslant 3$
无解
$3\frac{2}{15},2$
$5\frac{2}{15}$
$x_1=3$
$x_1\geqslant 4$
3, 2
5
$4,\frac{5}{9}$
$4\frac{5}{9}$

图 4.6

注:图中$\begin{bmatrix}56/33,145/33\\201/33\end{bmatrix}$表达 $x_1=\frac{56}{33}$, $x_2=\frac{145}{33}$, $z=\frac{201}{33}$,其余类似。

max 问题分支定界流程图如图 4.7 所示。

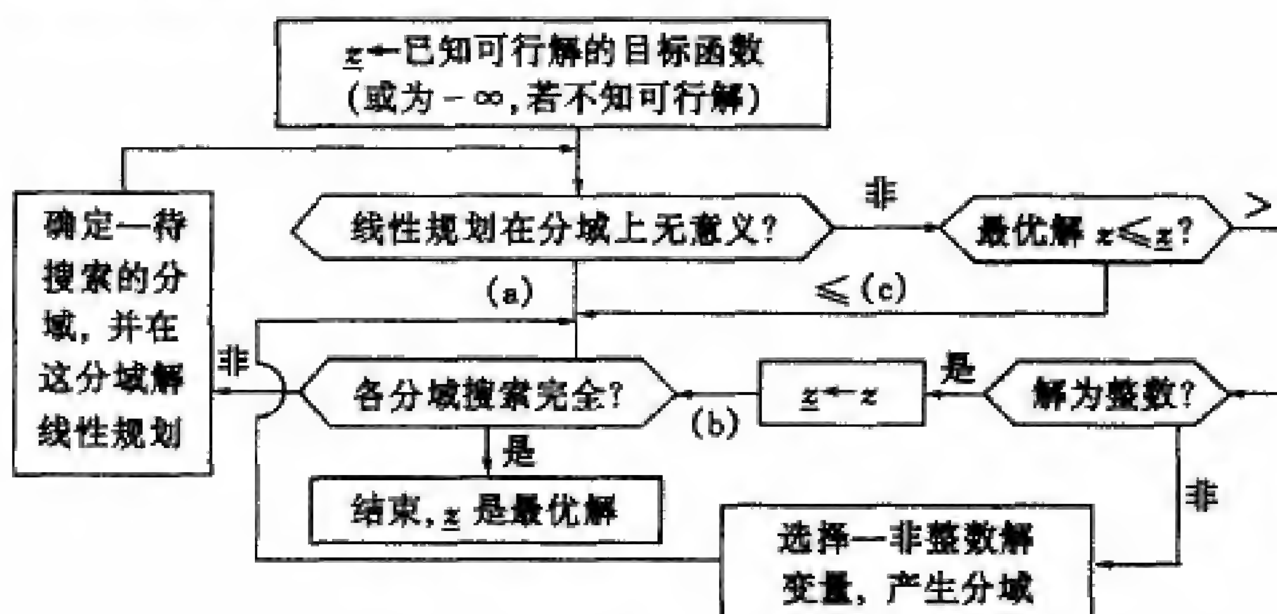


图 4.7

分支定界法最难的是判断什么情况下应后退。整数规划问题基本上有以下三种情况:

(a) 在该分域上问题无意义;

(b) 已获得整数解;

(c) 最优解 $z\leqslant\underline{z}$。

流程图上标有(a),(b),(c)便是此意。

选择哪一个非整数解变量进行分支是一个十分复杂而敏感的问题,目前只能做到任选其中一个。

由例 4.4 可知,分支是将连续问题的解空间分解成两个互相排斥的子空间,目的在于消去不存在所求的整数解的部分。分支定界法实际上是基于遍历搜索的,在遍历的过程中尽可能缩小搜索空间。如上述搜索的全过程是一棵搜索树。

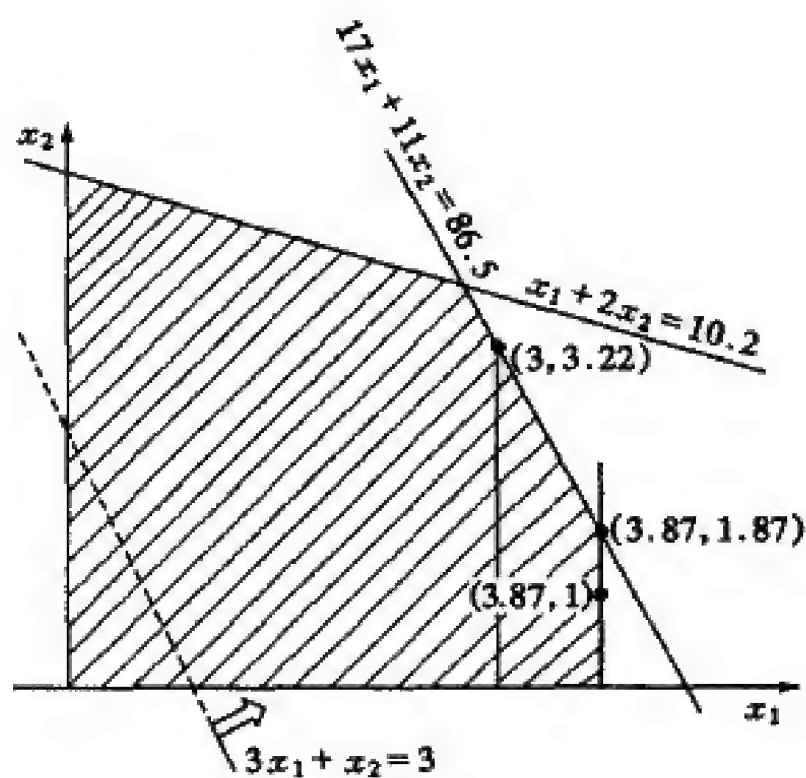


图 4.8

【例 4.5】 $\max z=3x_1+x_2$

$$\text{s.t.}\quad 17x_1+11x_2\leqslant 86.5$$
$$x_1+2x_2\leqslant 10.2$$
$$x_1\leqslant 3.87$$
$$x_1, x_2 \text{ 为非负整数}$$

本例可行解域如图 4.8 中影线所示。

(1) 线性规划的最优解为(3.87,1.87),$z=13.48$

$$1\leqslant x_2=1.87\leqslant 2$$

(2) 对于 $0\leqslant x_1\leqslant 3.87$,$0\leqslant x_2\leqslant 1$ 得解(3.87,1),$z=12.6$。对于 $0\leqslant x_1\leqslant 3.87$,$x_2\geqslant 2$ 得解(3.87,2),$z=13.4$。

(3) $x_2\geqslant 2$ 前提下,令 $0\leqslant x_1\leqslant 3$,解为

$$x_1=3,\ x_2=3.22,\ z=12.23$$

$x_1\geqslant 4$ 时,问题无解。

(4) 由于(3.87,1)点的 $z=12.6$,故考虑 $0\leqslant x_1\leqslant 3$,$x_2\leqslant 1$,此问题的解为(3,1),$z=10$,

是目前获得的最好的整数解。而对于 $x_1 \geqslant 4, x_2 \leqslant 1$ 则问题无解。

(5) 由于(3,3.22)点的 $z=12.23$,故

当 $0 \leqslant x_1 \leqslant 3, 2 \leqslant x_2 \leqslant 3$ 时有解 $x_1=3, x_2=3, z=12$。

当 $x_1 \geqslant 4, x_2 \geqslant 4$ 时有解 $x_1=2.2, x_2=4, z=10.6<12$。

故得最优解 $x_1=3, x_2=3, z=12$。

搜索过程用搜索树表示(见图 4.9),图中大括号(　)右肩上的小括号()中的数表示搜索顺序。

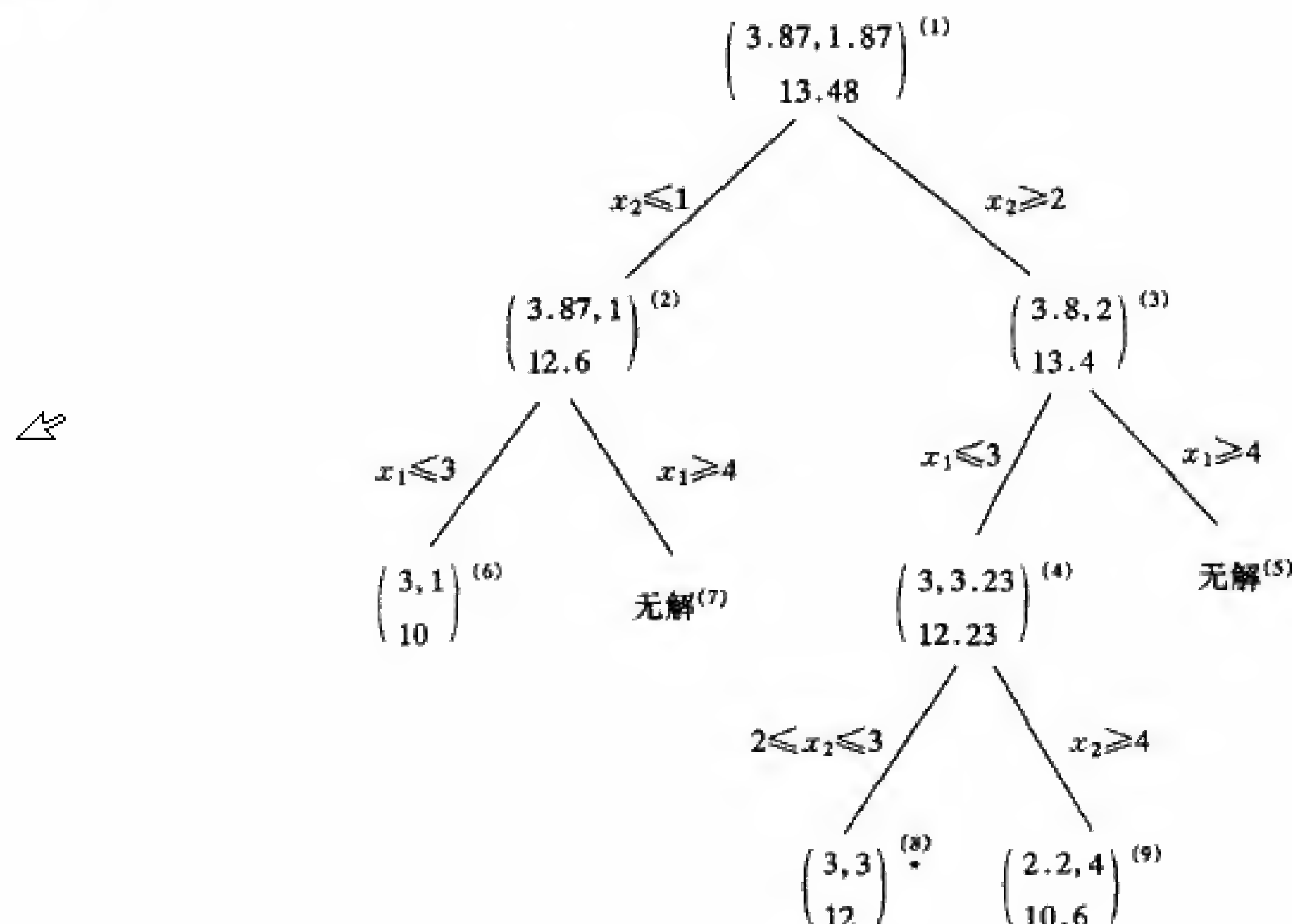


图 4.9

4.3 分支定界法在解混合规划上的应用

上述解整数规划的分支定界法也可用于混合规划。举例如下。

【例 4.6】

$$\max z = 3x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 - 2x_2 + x_3 \leqslant \frac{5}{2}$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 \leqslant \frac{3}{2}$$

$$x_i \geqslant 0, \ i=1,2,3,4, \ x_2, x_3 \text{ 为整数}$$

(1) 解相应的线性规划问题(见表 4.1;注意,本章及第 7 章的单纯形表排列格式与第 2 章,第 3 章略有不同。)得解:

$$x_2 = \frac{3}{2}, x_3 = \frac{11}{2}, x_1 = x_4 = 0, z = \frac{17}{2}$$

(2) 依 x_2 分别为下面两个分域:(a) $0 \leqslant x_2 \leqslant 1$; (b) $x_2 \geqslant 2$。

(a) 解在表 4.2 中,$x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = 1, x_3 = \frac{17}{4}, z = 7$。

(b) 解在表 4.3 中,该问题无解。

(3) 下面继续搜索 .

分域:(a) $0\leqslant x_3\leqslant 4$, (b) $x_3\geqslant 5$。

(a) 的解见表 4.4, $x_1=\frac{1}{4}$, $x_2=1$, $x_3=4$, $x_4=0$, $z=6\frac{1}{4}$,是目前最好的解。

(b) 的解见表 4.5,无可行解。

表 4.1

x_B	C_B	b \ x, C	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	β
			3	2	1	0	0	0	
s_1	0	5/2	1	−2	1	0	1	0	
s_2	0	3/2	2	(1)	0	1	0	1	
		0	3	(2)	1	0	0	0	
s_1	0	11/2	5	0	1	2	0	2	
x_2	2	3/2	2	1	0	1	1	1	
		3	−1	0	1	−2	0	−2	
x_3	1	11/2	5	0	1	2	1	2	
x_2	2	3/2	2	1	0	1	0	1	
		17/2	−6	0	0	−4	0	−4	

表 4.2 $(0\leqslant x_2\leqslant 2,\ x_1, x_2, x_3\geqslant 0)$

x_B	C_B	b \ x, C	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	β
			3	2	1	0	0	0	0	
s_1	0	5/2	1	−2	1	0	1	0	0	
s_2	0	3/2	(2)	1	0	1	0	1	0	
s_3	0	1	0	1	0	0	0	0	1	
			3	2	1	0	0	0	0	
s_1	0	7/4	0	−5/2	1	−1/2	1	−1/2	0	
x_1	3	3/4	1	1/2	0	1/2	0	1/2	0	6
s_3	0	1	0	(1)	0	0	0	0	1	(1)
		9/4	0	(1/2)	1	−3/2	0	−3/2	0	
s_1	0	17/4	0	0	1	1/2	1	−1/2	5/2	
x_1	3	1/4	1	0	0	1/2	0	1/2	−1/2	
x_2	2	1	0	1	0	0	0	0	1	
		11/4	0	0	(1)	−3/2	0	−3/2	−1/2	
x_3	1	17/4	0	0	1	1/2	1	−1/2	5/2	
x_1	3	1/4	1	0	0	1/2	0	1/2	−1/2	
x_2	2	1	0	1	0	0	0	0	1	
		7	0	0	0	−1	−1	−1	−1	

表 4.3 $(x_2\geqslant 2,\ x_1, x_2, x_4\geqslant 0)$

x_B	C_B	b \ x, C	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	β
			3	2	1	0	0	0	0	
s_1	0	5/2	1	−2	1	0	1	0	0	
s_2	0	3/2	2	1	0	1	0	1	0	
s_3	0	−2	0	(−1)	0	0	0	0	1	
		0	3	2	1	0	0	0	2	
s_1	0	13/2	1	0	1	0	1	0	−2	
s_2	0	−1/2	2	0	0	1	0	1	1	
x_2	2	2	0	1	0	0	0	0	−1	
			3	0	1	0	0	0	2	

表 4.4 $(1\leqslant x_2\leqslant 2, 0\leqslant x_3\leqslant 4,\ x_1, x_4\geqslant 0)$

x_B	C_B	b \ C \ x	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	s_4	β
			3	2	1	0	0	0	0	0	
s_1	0	7/4	0	−5/2	(1)	−1/2	1	−1/2	0	0	(1/4)
s_2	3	3/4	1	1/2	0	1/2	0	1/2	0	0	
s_3	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	
s_4	0	4	0	0	1	0	0	0	0	1	2
		9/4	0	1/2	(1)	−2/3	0	−3/2	0	0	
x_3	1	7/4	0	−5/2	1	−1/2	1	−1/2	0	0	
x_1	3	3/4	1	1/2	0	1/2	0	1/2	0	0	3/2
s_3	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1
s_4	0	9/4	0	(5/2)	0	1/2	−1	1/2	0	1	9/10
		4	0	3	0	−1	−1	−1	0	0	
x_3	1	4	0	0	1	0	0	0	0	1	
x_1	3	3/10	1	0	0	2/5	1/5	(2/5)	0	−1/5	3/2
s_3	0	1/10	0	0	0	−1/5	(2/5)	−1/5	1	−2/5	(1/2)
x_2	2	9/10	0	1	0	1/5	−2/5	(1/5)	0	2/5	
		$6^{7}/10$	0	0	0	−8/5	(1/5)	−8/5	0	−6/5	
x_3	1	4	0	0	1	0	0	0	0	1	
x_1	3	1/4	1	0	0	1/2	0	1/2	−1/2	0	
s_1	0	1/4	0	0	0	−1/2	1	−1/2	5/2	−1	
x_2	2	1	0	1	0	0	0	0	1	0	
		$6^{3}/4$	0	0	0	−3/2	0	−3/2	−1/2	−1	

表 4.5 $(1\leqslant x_2\leqslant 2, x_3\geqslant 5,\ x_1, x_4\geqslant 0)$

x_B	C_B	b \ C \ x	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	s_4	β
			3	2	1	0	0	0	0	0	
s_1	0	7/4	0	−5/2	1	−1/2	1	−1/2	0	0	
x_1	3	3/4	1	1/2	0	1/2	0	1/2	0	0	
s_3	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	
s_4	0	−5	0	0	(−1)	0	0	0	0	1	
			0	1/2	1	−3/2	0	−3/2	0	0	
s_1	0	−13/4	0	−5/2	1	(−1/2)	1	−1/2	0	0	
x_1	3	3/4	1	1/2	0	1/2	0	1/2	0	0	
s_3	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	
x_3	1	5	0	0	1	0	0	0	0	−1	
			0	1/2	0	−3/2	0	−3/2	0	1	
x_4	0	13/2	0	5	0	1	−2	1	0	0	
x_1	3	(−10/4)	1	(−2)	0	0	1	0	0	0	
s_3	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	
x_3	1	5	0	0	1	0	0	0	0	−1	
			0	−4	0	0	−3	0	0	1	
x_4	0	1/4	5/2	0	0	1	1/2	1	0	0	
x_2	2	5/4	−1/2	1	0	0	−1/2	0	0	0	
s_3	0	−1/4	1/2	0	0	0	1/2	0	1	0	
x_3	1	5	0	0	1	0	0	0	0	−1	
		15/2	4	0	0	0	1	0	1/4	5	

故得全部搜索过程(见图 4.10)。

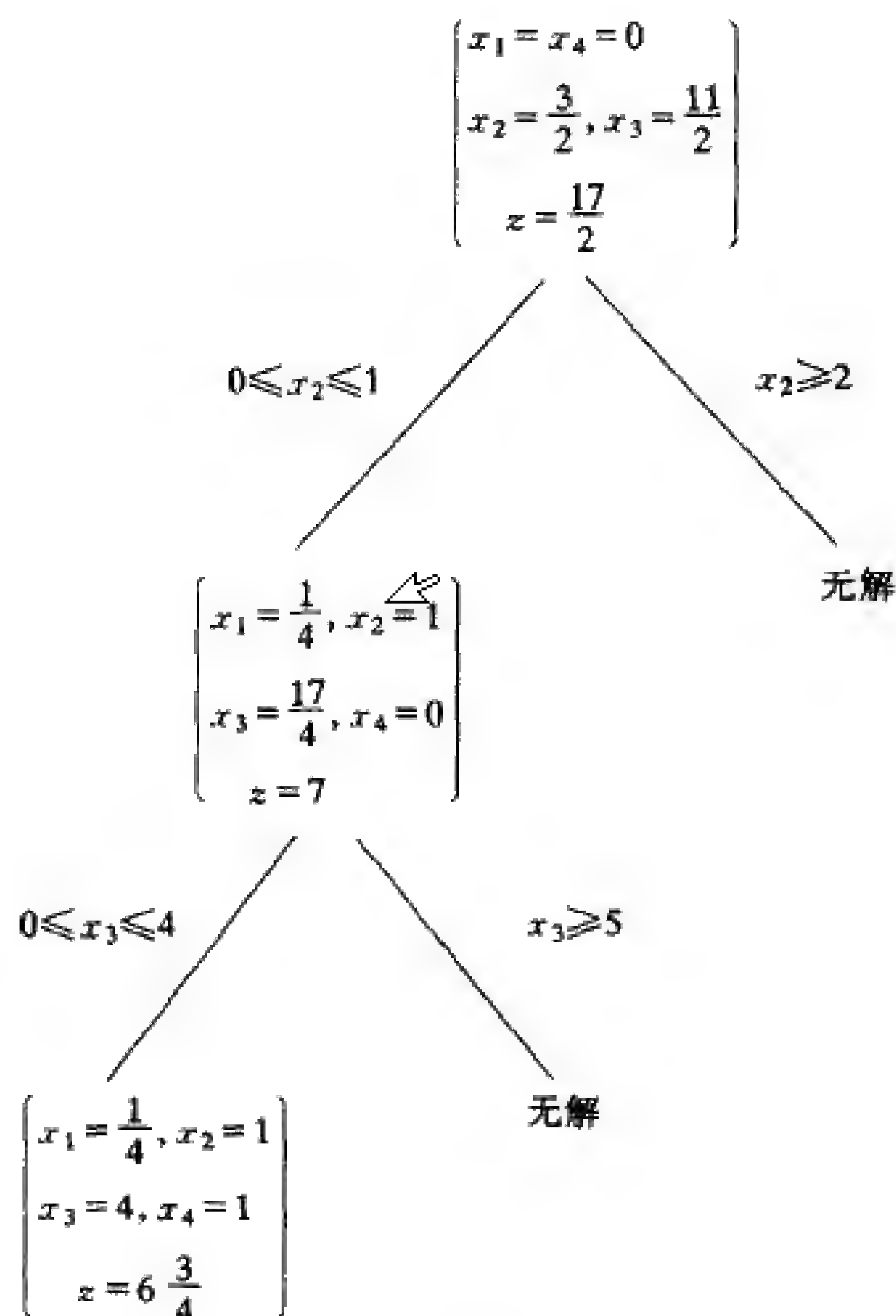


图 4.10

4.4 估界方法

从上面的讨论可知,分支定界法的搜索过程是一搜索树,树上每一节点都对应于解一线性规划问题,求解的实际作用在于得到一个目标函数的界。为了节省计算量,本节将介绍一种对目标函数进行简单估界的算法。

【例 4.7】

$$\begin{aligned} \max\ & z=\boldsymbol{Cx} \\ \text{s.t.}\ & \boldsymbol{Ax}\leqslant \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x}\ \text{为非负整数} \end{aligned}$$

将 $\boldsymbol{x}$ 为非负整数改为 $\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$ 的线性规划问题。设 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_B\\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_N\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{B}\cdots\boldsymbol{N})=(a_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{C}_B\cdots\boldsymbol{C}_N)$。

$$\begin{aligned} \max\ & z=\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{x}_B+\boldsymbol{C}_N\boldsymbol{x}_N \\ \text{s.t.}\ & \boldsymbol{x}_B=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N \\ & \boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0} \end{aligned}$$

或 $x_B = B^{-1}b - \sum_{j\in N} B^{-1}P_j x_j$，其中设 $A=(P_1,P_2,\cdots,P_n)$，即 P_j 是矩阵 A 的第 j 列列向量。

于是有

$$z=(C_B \vdots C_N)\begin{bmatrix}x_B\\x_N\end{bmatrix}=C_Bx_B+C_Nx_N$$
$$=C_B\left(B^{-1}b-\sum_{j\in N}B^{-1}P_jx_j\right)+\sum_{j\in N}c_jx_j$$
$$=C_BB^{-1}b+\sum_{j\in N}(c_j-C_BB^{-1}P_j)x_j$$

或写成

$$z=z_0+\sum_{j\in N}(c_j-z_j)x_j=z_0+\sum_{j\in N}\bar{c}_jx_j$$
$$\bar{c}_j=c_j-z_j,\ j\in N$$
$$x_i=x_i^*-\sum_{j\in N}a_{ij}x_j,\ x_i\geqslant 0,\ i\in \boldsymbol{B},\ x_j\geqslant 0,\ j\in N$$

设最优解为

$$z=C_BB^{-1}b=z_0,\ x_B=B^{-1}b,\ x_N=0$$

最优解 $x_i^*=\lfloor x_i^*\rfloor+a_i, i\in B$。其中 B 是基变量 x_B 对应下标集合。

分支定界法即对其中的一个 x_j 分别附加下面的限制：

$$0\leqslant x_j\leqslant\lfloor x_j^*\rfloor,\ x_j\geqslant\lfloor x_j^*\rfloor+1$$

再去求各自线性规划的解。

如图 4.11 所示，实线表示 z 的真实改变图像。

$$z_l\leqslant z_0-\delta_{zl},\ z_r\leqslant z_0-\delta_{zr}$$

δ_{zl} 和 δ_{zr} 可从单纯形表格中得到。$z_0-\delta_{zl}$ 和 $z_0-\delta_{zr}$ 可以分别作为真实的 z_l 和 z_r 的界。

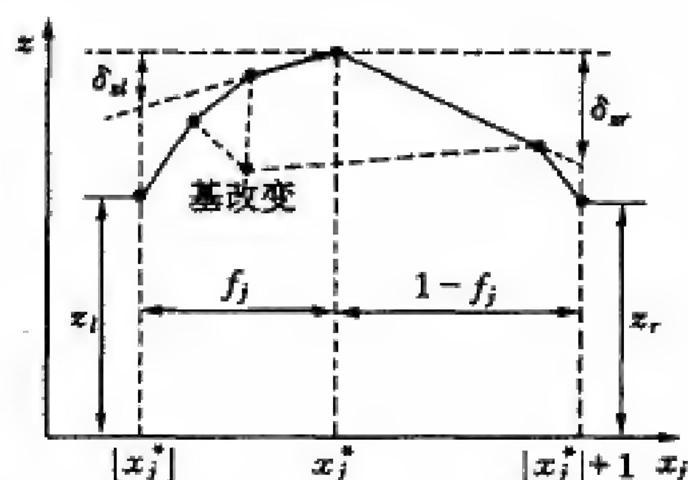


图 4.11

$x_i=x_i^*-\sum_{j\in N}a_{ij}x_j$。为了使 x_i 是整数，故有 $x_i\leqslant\lfloor x_i^*\rfloor$ 或 $x_i\geqslant\lfloor x_i^*\rfloor+1$ 两种可能。设 N 是非基变量集合，$N^+\triangleq\{j\in N\mid a_{ij}>0\}$，$N^-\triangleq\{j\in N\mid a_{ij}<0\}$ 于是，对于 $x_i\leqslant\lfloor x_i^*\rfloor$，有

$$x_i-\lfloor x_i^*\rfloor=x_i^*-\lfloor x_i^*\rfloor-\sum_{j\in N^+}a_{ij}x_j-\sum_{j\in N^-}a_{ij}x_j\leqslant 0$$

令 $f_i=x_i^*-\lfloor x_i^*\rfloor<1$，有

$$x_i-\lfloor x_i^*\rfloor=f_i-\sum_{j\in N^+}a_{ij}x_j-\sum_{j\in N^-}a_{ij}x_j\leqslant 0,$$

或

$$-\sum_{j\in N^+}a_{ij}x_j-\sum_{j\in N^-}a_{ij}x_j\leqslant -f_i \tag{4.4.1}$$

将(4.4.1)作为一约束条件附加在单纯形表格，并利用对偶单纯形法求解，并假定这个过程基没有改变。

对于 $x_i\geqslant\lfloor x_i^*\rfloor+1$ 也有类似情况。

$$x_i-\lfloor x_i^*\rfloor=x_i^*-\lfloor x_i^*\rfloor-\sum_{j\in N^+}a_{ij}x_j-\sum_{j\in N^-}a_{ij}x_j$$

$$= f_i - \sum_{j\in N^+} a_{ij}x_j - \sum_{j\in N^-} a_{ij}x_j \geqslant 1$$

$$\sum_{j\in N^+} a_{ij}x_j + \sum_{j\in N^-} a_{ij}x_j \leqslant f_i - 1 < 0 \tag{4.4.2}$$

将(4.4.2)加到单纯形表格中,利用对偶单纯形法求解可得

利用对偶单纯形法可得

$$\delta_{zl} = \min_{k\in N^+}\{\bar{c}_k f_j / a_{jk}\},\ \delta_{zr} = \min_{k\in N^-}\{\bar{c}_k (f_j - 1)/a_{jk}\}$$

$$\max\{\bar{z}_l, \bar{z}_r\} = \bar{z}_0 - \min\{\delta_{zl}, \delta_{zr}\}$$

还是通过例子说明算法的思想比较直观。(估计方法与(4.4.1)及(4.4.2)略有不同。)

【例 4.8】

$$\max\ z = 18x_1 + 14x_2 + 8x_3 + 4x_4$$

$$\text{s.t.}\quad 15x_1 + 12x_2 + 7x_3 + 4x_4 + x_5 \leqslant 43$$

$$x_j \geqslant 0, \text{整数},\ j = 1,2,3,4,5$$

(1) 用单纯形法求解(见表 4.6)。

表 4.6

x_B	C_B	b \ C \ x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	β
			18	14	8	4	0	0	
s	0	43	15	12	7	4	1	1	
		0	(18)	14	8	4	0	0	
x_1	18	43/15	1	4/5	7/15	4/15	1/15	1/15	
		$51^3/5$	0	−2/5	−2/5	−4/5	−6/5	−6/5	

$$x_1 = 2\frac{13}{15} - \frac{4}{5}x_2 - \frac{7}{15}x_3 - \frac{4}{15}x_4 - \frac{1}{15}x_5 - \frac{1}{15}x_6 \tag{*}$$

$$z = 51\frac{3}{5} - \frac{2}{5}x_2 - \frac{2}{5}x_3 - \frac{4}{5}x_4 - \frac{6}{5}x_5 - \frac{6}{5}x_6$$

$x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0,\ z = 51\frac{3}{5}$是最优解。

(2) 若考虑 $x_1 \leqslant 2$ 或 $x_1 \geqslant 3$ 两种情况,则分别讨论如下。

(a) $\lfloor x_1^* \rfloor = 2$

$$x_1 - \lfloor x_1^* \rfloor = \frac{13}{15} - \frac{4}{5}x_2 - \frac{7}{15}x_3 - \frac{4}{15}x_4 - \frac{1}{15}x_5 - \frac{1}{15}x_6 \leqslant 0$$

所以

$$-\frac{4}{5}x_2 - \frac{7}{15}x_3 - \frac{4}{15}x_4 - \frac{1}{15}x_5 - \frac{1}{15}x_6 \leqslant -\frac{13}{15}$$

将它作为附加约束条件,应用对偶单纯形法求解,见表 4.7。

表 4.7

x_B	C_B	b \ C \ x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	β
			18	14	8	4	0	0	0	
x_1	18	43/15	1	4/5	7/15	4/15	1/15	1/15	0	
x_2	0	−13/15	0	(−4/5)	−7/15	−4/15	−1/15	−1/15	1	
		$51^3/5$	0	(−2/5)	−2/5	−4/5	−6/5	−6/5	0	

$$\min\left\{\frac{2/5}{4/5}, \frac{2/5}{7/15}, \frac{4/5}{4/15}, \frac{6/5}{1/15}, \frac{6/5}{1/15}\right\} = \frac{1}{2}.$$

从 $x_1 = 2\frac{13}{15} - \frac{4}{5}x_2 - \frac{7}{15}x_3 - \frac{4}{15}x_4 - \frac{1}{15}x_5 - \frac{1}{15}x_6$ 可知:可以通过非基变量 x_2, x_3, x_4, x_5

的升值(设 x_2 从 0 升到 δx_1)使 z 从 $2\frac{13}{15}$ 下降到 2，即 $\frac{13}{15}=\frac{4}{5}\delta x_2$，$\delta x_2=\frac{13/15}{4/5}$，由此 $\delta z_2=-\frac{2}{5}\delta x_2=-\frac{13}{30}$，依类似理由，$x_3$ 从 0 增加 δx_3，也可使 z 下降 $\frac{13}{15}$，$\frac{13}{15}=\frac{7}{15}\delta x_3$，$\delta x_3=\frac{13}{15}\times\frac{15}{7}=\frac{13}{7}$，$\delta z_3=-\frac{2}{5}\times\frac{13}{7}=-\frac{26}{35}$，同理可得 $\delta x_4=\frac{13}{15}/\frac{4}{15}=\frac{13}{4}$，$\delta z_4=-\frac{4}{5}\times\frac{13}{4}=-\frac{13}{5}$，$\delta x_5=\delta x_6=\frac{13}{15}/\frac{1}{15}=13$，$\delta z_5=\delta z_6=-\frac{6}{5}\times 13=-\frac{78}{5}$，

令

$$\begin{aligned}\delta z &\triangleq -\min\{\delta z_2,\delta z_3,\delta z_4,\delta z_5,\delta z_6\}\\ &=-\min\left\{\frac{13}{30},\frac{26}{35},\frac{13}{5},\frac{78}{5},\frac{78}{5}\right\}\\ &=-\frac{13}{30}\end{aligned}$$

即由 x_2 的增加而达到，从而可以断言

$$\begin{aligned}\max\ & z=18x_1+14x_2+8x_3+4x_4\\ \text{s.t.}\ & 15x_1+13x_2+7x_3+4x_4+x_5\leqslant 43\\ & 0\leqslant x_1\leqslant 2,\ x_i\geqslant 0\end{aligned}$$

的解 $z\leqslant 51\frac{3}{5}-\frac{13}{30}=51\frac{1}{6}$。

到此搜索过程见图 4.12，未写出的变量均为 0，例如

$$\begin{pmatrix}x_1=2\frac{13}{15}\\ z=51\frac{3}{5}\end{pmatrix},\ x_2=x_3=\cdots=x_6=0。$$

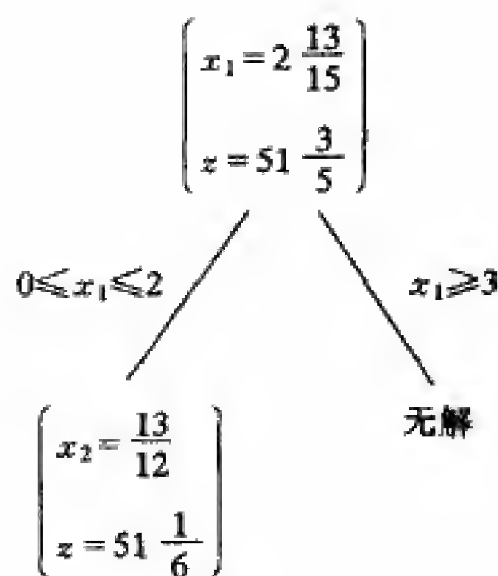


图 4.12

(b) $x_1\geqslant 3$ 原问题无解。可从 $15x_1+13x_2+7x_3+4x_4+x_5\leqslant 43$，直观得出，也可利用附加 $-x_1\leqslant -3$ 约束条件，利用对偶单纯形法得出相同结果。

(3) 下面转入求 $0\leqslant x_1\leqslant 2$ 的解。

令 $x_1=2-\bar{x}_1$，代入(＊)，整理得

$$2-\bar{x}_1=2\frac{13}{15}-\frac{4}{5}x_2-\frac{7}{15}x_3-\frac{4}{15}x_4-\frac{1}{15}x_5-\frac{1}{15}x_6$$

$$x_2=\frac{13}{12}+\frac{5}{4}\bar{x}_1-\frac{7}{12}x_3-\frac{1}{3}x_4-\frac{1}{12}x_5-\frac{1}{12}x_6$$

代入

$$z=51\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\bar{x}_1-\frac{1}{6}x_3-\frac{2}{3}x_4-\frac{7}{6}x_5-\frac{7}{6}x_6$$

于是导致解下列问题：

$$\max z=51\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\bar{x}_1-\frac{1}{6}x_3-\frac{2}{3}x_4-\frac{7}{6}x_5-\frac{7}{6}x_6$$

$$x_2=\frac{13}{12}+\frac{5}{4}\bar{x}_1-\frac{7}{12}x_3-\frac{1}{3}x_4-\frac{1}{12}x_5-\frac{1}{12}x_6$$

$$\bar{x}_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\geqslant 0$$

故得一可行解：

$$x_2=\frac{13}{12},\ \bar{x}_1=x_3=\cdots=x_6=0,\ z=51\frac{1}{6}$$

这个结果和估的界一致。

(4) 由于 $1\leqslant x_2\leqslant 2$，故又分解为：(a) $0\leqslant x_2\leqslant 1$；(b) $x_2\geqslant 2$。

两种情况分别讨论如下。

先讨论 $x_2\geqslant 2$。

由于 $x_2=\frac{13}{12}+\frac{5}{4}\bar{x}_1-\frac{7}{12}x_3-\frac{1}{3}x_4-\frac{1}{12}x_5-\frac{1}{12}x_6$，故只有一种可能解，由 $\bar{x}_1$ 的增加而达到。

$$\delta\bar{x}_1=\left(2-\frac{13}{12}\right)/\frac{5}{4}=\frac{11}{12}/\frac{5}{4}=\frac{11}{15},\ \delta z=-\frac{1}{2}\times\frac{11}{15}=-\frac{11}{30}$$

至于 $0\leqslant x_2\leqslant 1$，

$$\delta z=-\frac{1}{12}\min\left\{\underset{(3)}{\frac{2}{7}},\ \underset{(4)}{2},\ \underset{(5)}{14},\ \underset{(6)}{14}\right\}=\frac{2}{7}\left(-\frac{1}{12}\right)=-\frac{1}{42}$$

可见 $x_2\geqslant 2$ 估的界比 $0\leqslant x_2\leqslant 1$ 小，故沿 $0\leqslant x_2\leqslant 1$ 往后搜索，而且下面括号内的数是对应变量的下标，例如$\underset{(3)}{\frac{2}{7}}$，表示$\frac{2}{7}$是由 x_3 从 0 上升计算而得到的，其余类似，不赘述。

令 $x_2=1-\bar{x}_2$，得

$$x_3=\frac{1}{7}+\frac{15}{7}\bar{x}_1+\frac{12}{7}\bar{x}_2-\frac{4}{7}x_4-\frac{1}{7}x_5-\frac{1}{7}x_6$$

$$z=51\frac{1}{7}-\frac{6}{7}\bar{x}_1-\frac{2}{7}\bar{x}_2-\frac{4}{7}x_4-\frac{8}{7}x_5-\frac{8}{7}x_6$$

$0<x_3=\frac{1}{7}<1$，故分解为 $x_3=0$ 和 $x_3=1$ 两种情况，下面分别进行讨论。

(5) 由于 $x_3=\frac{1}{7}+\frac{15}{7}\bar{x}_1+\frac{12}{7}\bar{x}_2-\frac{4}{7}x_4-\frac{1}{7}x_5-\frac{1}{7}x_6$，故 $x_3=0$ 只能通过 x_4,x_5,x_6 由 0 上升而达到，而且

$$\delta z=-\frac{1}{7}\min\{\underset{(4)}{1},\quad \underset{(5)}{4},\quad \underset{(6)}{8}\}=-\frac{1}{7}$$

$$x_4=\frac{1}{4}+\frac{15}{4}\bar{x}_1+3\bar{x}_2-\frac{1}{4}x_5-\frac{1}{4}x_6$$

$$z=51-3\bar{x}_1-2\bar{x}_2-x_5-x_6$$

(6) 由于只能由 x_5,x_6 的改变才能使 $x_4=0$，故

$$\delta z=-\frac{1}{4}\min\{\underset{(5)}{4},\quad \underset{(6)}{4}\}=-1$$

而 $x_4\geqslant 0$，$\delta z=-\frac{3}{4}\min\left\{\underset{(1)}{\frac{4}{5}},\underset{(2)}{\frac{2}{3}}\right\}=-\frac{1}{2}$等等，搜索的全过程见图 4.13。

其中最优解是 $x_4=0$ 时 $x_1=2, x_2=1, z=50$。为了简单起见，图中只给出非零的变元的值，未写出的变元自然是取零值了。

现将 $x_1\leqslant 2, x_2\leqslant 1, x_3=0, x_4=0$ 条件下的结果解答于后。

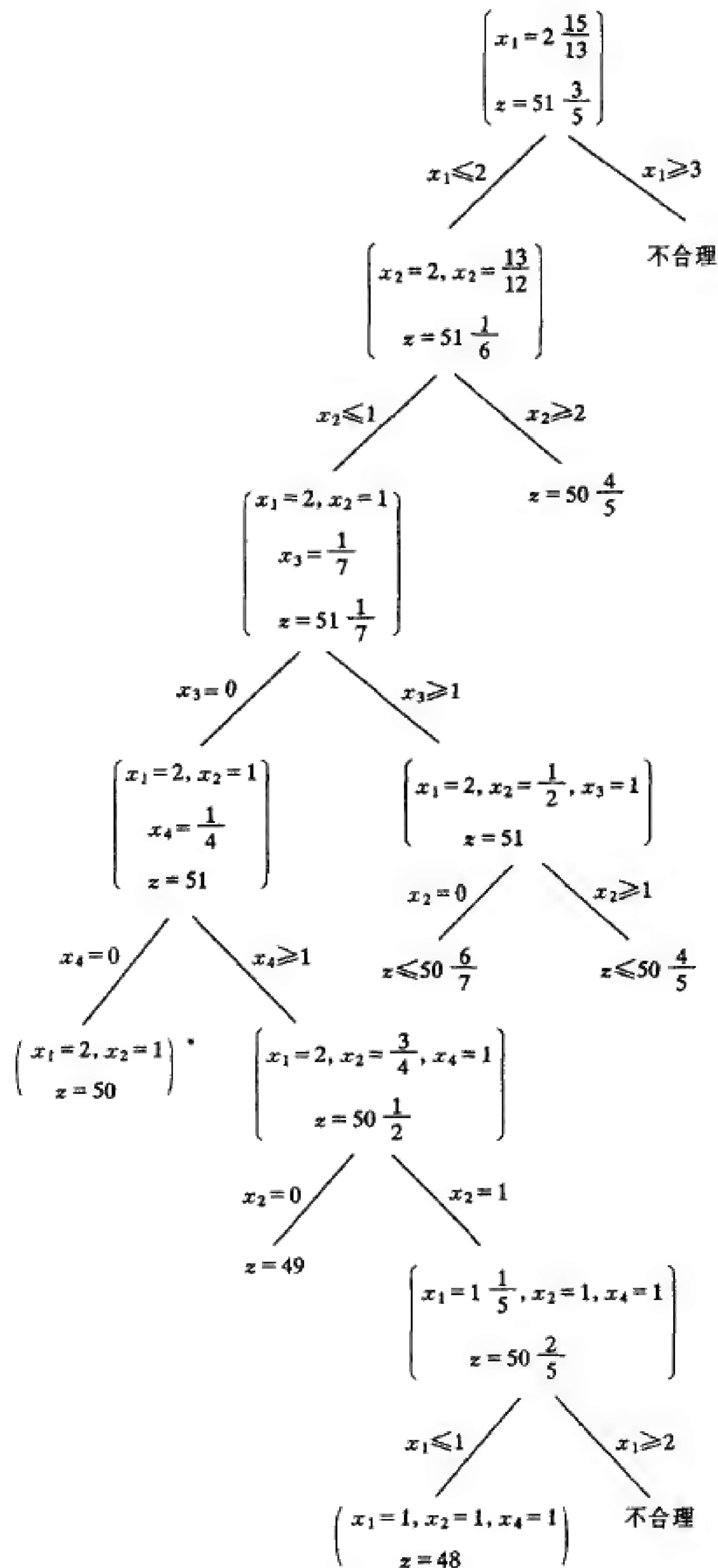


图 4.13

$$\max\ z = 18x_1 + 14x_2$$

$$\text{s.t.}\quad 15x_1 + 13x_2 + x_5 + x_6 = 43$$

$$x_1 + x_7 = 2$$

$$x_2 + x_8 = 1$$

$$x_1, x_2, x_5, x_6, x_7, x_8 \geqslant 0$$

进行表上运算(见表 4.8)。

表 4.8

x_B	C_B	b \ x, C	x_1	x_2	x_5	x_6	x_7	x_8	β
			18	14	0	0	0	0	
x_6	0	43	15	13	1	1	0	0	43/15
x_7	0	2	(1)	0	0	0	1	0	(2)
x_8	0	1	0	1	0	0	0	1	
			(18)	14	0	0	0	0	
x_6	0	13	0	13	1	1	-15	0	
x_1	18	2	1	0	0	0	1	0	
x_8	0	1	0	(1)	0	0	0	1	
			0	14	0	0	0	0	
x_6	0	0	0	0	1	1	-15	-13	
x_1	18	2	1	0	0	0	1	0	
x_2	14	1	0	1	0	0	0	1	
		50	0	0	0	0	0	1	

故得问题的最优解为

$$x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = x_4 = x_5 = 0, z = 50.$$

4.5 求解 0-1 规划的隐枚举法

0-1 规划是一种特殊的纯整数规划,其变量只能取 0 或 1。求解 0-1 规划的隐枚举法不需用单纯形法求解线性规划问题。该算法的基本思想是从所有变量等于 0 出发,依次指定一些变量为 1,直至得到一个可行解,它就是迄今为止最好的可行解。此后,依次检查变量等于 0 或 1 的某些组合,对迄今为止最好的可行解不断加以改进,最终获得最优解。隐枚举法与穷举法有着根本的区别,它不需要将所有可行的变量组合一一枚举。实际上,在得到最优解时,很多可行的变量组合并没有被枚举,只是通过分析、判断,排除了它们是最优解的可能性,也就是说,它们被隐含枚举了,因此叫隐枚举法。

4.5.1 0-1 规划数学模型的标准形式

$$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$c_j \geqslant 0 \ (j = 1, 2, \cdots n)$$

$$Q_i = -b_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant 0 \ (j = 1, 2, \cdots, m)$$

$$x_j = 0 \text{ 或 } 1 \ (j = 1, 2, \cdots, n)$$

请注意,上述数学模型被称为 0-1 规划的标准形式,而不是标准型。

4.5.2 任意的 0-1 规划模型如何化为标准形式

(1) 若原模型要求目标函数实现最大化,如何将其化为最小问题?

这种情况下，可将原模型中的目标函数式 CX 前加负号，变为 $-CX$，求 $\min(-CX)$，再将所得的最小值反号，即为所求。即有

$$\max(CX)=-[\min(-CX)]$$

(2) 若原模型中某个目标函数系数为负，如何将其化为正？

例如，有 $\min z=2x_1-4x_2+6x_3$，因为 $c_2=-4$，令 $x_2=1-y_2$，其中 $y_2=0$ 或 1，则有

$$\min z=2x_1-4(1-y_2)+6x_3=2x_1+4y_2+6x_3-4$$

也就是说，用新的 0-1 变量 y_2 取代了原来的 0-1 变量 x_2，以使相应的目标函数系数变为正的。需要注意的是，各约束条件中的 x_2 也要换成 $(1-y_2)$。

(3) 若原模型中约束条件为"≤"不等式或等式，如何将其化为"≥"不等式？

若原模型中约束条件为"≤"不等式，有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i$$

则将其左端移到右端，即得到标准形式

$$Q_i=b_i-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant 0$$

若原模型中约束条件为等式，有

$$-b_i+\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=0$$

则先将其变为两个不等式，有

$$Q_i=-b_i+\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant 0$$

$$Q'_i=-b_i+\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant 0$$

再将上述不等式 Q'_i 的两端同乘以 -1，可得

$$Q''_i=b_i-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant 0$$

这样，原模型中的一个等式约束条件就变成了两个"≥0"的不等式约束条件 Q_i 与 Q''_i。

4.5.3 隐枚举法的基本原理与步骤

下面结合一个例题加以介绍。

【例 4.9】 求解如下的 0-1 规划问题：

$$\begin{aligned}
&\min z=4x_1+3x_2+2x_3\\
&2x_1-5x_2+3x_3\leqslant 4\\
&4x_1+x_2+3x_3\geqslant 3\\
&x_2+x_3\geqslant 1\\
&x_j=0 \text{ 或 } 1\ (j=1,2,3)
\end{aligned}$$

1. 把 0-1 规划的数学模型化成标准形式：

$$\begin{aligned}
&\min z=4x_1+3x_2+2x_3\\
&Q_1=4-2x_1+5x_2-3x_3\geqslant 0
\end{aligned}$$

$$Q_2 = -3 + 4x_1 + x_2 + 3x_3 \geqslant 0$$
$$Q_3 = -1 + x_2 + x_3 \geqslant 0$$
$$x_j = 0 \text{ 或 } 1 \ (j = 1,2,3)$$

求解过程参见图 4.14.

2. 判断无约束下最优解$(0,0,0)^T$即节点 1 是否是可行解?

显然,$(0,0,0)^T$是无约束条件下的最优解,若它能使各约束式得到满足,则它必是 0-1 规划原问题的最优解。

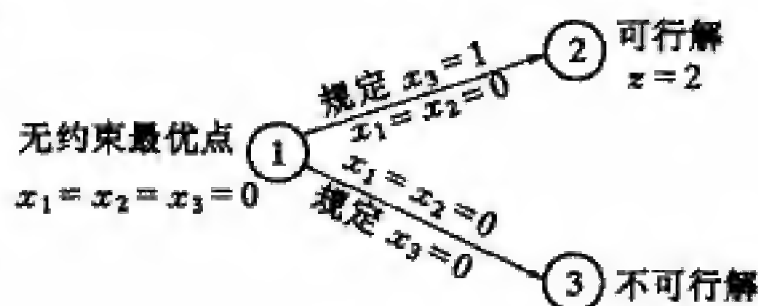


图 4.14

本例中把$(0,0,0)^T$代入各约束式,得

$$Q_1 = 4 \geqslant 0$$
$$Q_2 = -3$$
$$Q_3 = -1$$

称无约束下最优点$(0,0,0)^T$为节点 1,现已知节点 1 不是可行解。

3. 判断由节点 1 继续分支,能否得到可行解?

判断的方法是:在各个不满足的约束中,令每个正系数的变量都为 1,看是否可使原来不满足的约束条件变为满足。如是,则由节点 1 继续分支下去,可能得到可行解;如否,则不必由节点 1 再分支下去,因为由节点 1 不可能引出可行解。

本例中,原来有的约束式 Q_2, Q_3 不满足。在 Q_2 中,令 $x_1=x_2=x_3=1$,得 $Q_2=5>0$;在 Q_3 中,令 $x_2=x_3=1$,得 $Q_3=1>0$,故令一些变量为 1 可使两个不满足的约束都变为满足,这说明从节点 1 分支可能得到可行解。

从节点 1 继续分支的目的,是为了得到第一个可行解。

4. 欲分支,必须从某个不满足的约束的系数为正值的变量中,选择一个自由变量 x_j 作非自由变量。

所谓自由变量,就是没有规定其特定值(0 与 1 中的一个)的变量;而被赋予特定值(0 与 1 中的一个)的变量称为非自由变量。

在节点 1 处,x_1,x_2,x_3 均为自由变量,可从中挑选一个 x_j,挑选的原则是:$x_j=1$ 应使所有的约束离可行性的总距离为最小。

本例中,若令 $x_1=1(x_2=x_3=0)$,则

$Q_1=2$,其离可行性的距离用 0 表示;

$Q_2=1$,其离可行性的距离用 0 表示;

$Q_3=-1$,其离可行性的距离用 1 即$|Q_3|$表示。

因此,若令 $x_1=1$,则所有约束离可行性的总距离为 1。

同理可得,若 $x_2=1(x_1=x_3=0)$,则所有约束离可行性的总距离为 2;若 $x_3=1(x_1=x_2=0)$,则所有约束离可行性的总距离为 0。

因此,选 x_3 作非自由变量,可使所有约束离可行性的总距离为最小。

5. 从节点 1 分支,规定非自由变量 $x_j=1$,得到节点 2。

规定非自由变量 $x_3=1$,自由变量 $x_1=x_2=0$,得到节点 2。检验节点 2,它满足各约束,

是可行解，得到 $z=2$，这是迄今为止得到的最好的可行解相应的目标函数值。

6．由节点2退回到节点1，从节点1再分支：规定非自由变量 $x_j=0$，得到节点3。规定非自由变量 $x_3=0$，自由变量 $x_1=x_2=0$，得到节点3，检验节点3，不是可行解。

7．在已得到迄今为止最好的可行解的情况下，判断各节点是否继续分支？

判断准则是：若继续分支可能得到比迄今为止最好的可行解更好的可行解，则继续分支；否则，便停止分支。

(1) 由可行解节点2是否继续分支？

由节点2继续分支，意味着在保持非自由变量 $x_3=1$ 的基础上，令原来为0的某个其他变量等于1，而这样只会增加目标函数的值，不会得到比 $z=2$ 更小的值。故由节点2不再继续分支，即由节点2可能得到的所有的解已被隐枚举了。

(2) 由不可行解节点3是否继续分支？

由节点3继续分支的目的，不是为了得到一般的可行解，而是要得到优于 $z=2$ 的可行解。

要继续分支，首先必须有一个符合某些条件的自由变量的下标集合 T，以使从中挑出一个作非自由变量。对节点3而言，非自由变量 x_3，自由变量是 x_1, x_2，那么 x_1, x_2 的下标是否能进入 T 集合呢？因为此前已求出迄今为止最好的目标函数值 $z=2$，故只有那些可能使问题得到优于 $z=2$ 的可行解的自由变量才能进入 T，而不是当前所有自由变量均属于 T。那么，自由变量要进入 T，必须满足哪些条件呢？必须满足的条件之一是：该变量在不满足的某个约束中有一个正的系数；条件之二是：该变量在目标函数中的系数应小于 W，$W=z-\sum_{i\in S}c_ix_i$，式中的 z 是迄今为止最好的目标函数值，S 是非自由变量的下标的集合。本例中，$W=2-c_3x_3=2-2\times0=2$。在节点3处，变量 x_1, x_2 均满足上述条件之一，但均不满足条件之二，故 $T=\phi$，即由节点3继续分支不可能得到比 $z=2$ 更好的目标函数值了，因此由节点3不再分支。

至此，各节点都已查明，都没有必要继续分支了，故得到0-1规划的最优解：$x_1=0$，$x_2=0$，$x_3=1$，目标函数最小值为2。

本例题中，在节点3处，T 是空集，故由节点3不再分支。对一般问题而言，若 T 非空集，则分别令 T 中各个变量为1，找出 T 中使所有约束离可行性的总距离最小的变量 x_j（像在节点1处曾经做过的那样），然后把下标 j 从集合 T 中消去，加入到集合 S 中，可继续分支。这样，一直进行到不可能或不必要再继续分支为止。

4.5.4　求解0-1规划的另一种隐枚举法

这里介绍的是一种简单方便、常用于手算或求解小规模问题的方法。

【例4.10】

$$\max z=3x_1-2x_2+5x_3$$
$$x_1+2x_2-x_3\leqslant2$$
$$x_1+4x_2+x_3\leqslant4$$
$$x_1+x_2\leqslant3$$
$$x_j=0\text{ 或 }1\ (j=1,2,3)$$

解：

(1) 先用试探的方法找出一个初始可行解。

比如，$x_1=1, x_2=x_3=0$，就符合所有约束条件，其目标函数值 $z_0=3$。

(2) 在原问题的基础上，增加一个约束条件——过滤条件。

过滤条件是

$$3x_1-2x_2+5x_3\geqslant 3$$

这是因为初始可行解的目标函数值已为 3。要继续寻找的当然是大于 3 的可行的目标函数值，因此，问题变为：

$$\max\ z=3x_1-2x_2+5x_3$$

$$\text{s.t.}\quad x_1+2x_2-x_3\leqslant 2 \qquad (4.5.1)$$

$$x_1+4x_2+x_3\leqslant 4 \qquad (4.5.2)$$

$$x_1+x_2\leqslant 3 \qquad (4.5.3)$$

$$3x_1-2x_2+5x_3\geqslant 3$$

$$x_j=0 \text{ 或 } 1\ (j=1,2,3)$$

(3) 求解上述问题

按照穷举法的思路，依次检查各种变量组合，每找到一个可行解，求出它的目标函数值 z_1 后，如果 $z_1>z_0$，则将原来的过滤条件的常数项换成 z_1。

一般来说，过滤条件是所有约束条件中关键的一个，因而先检查它是否满足，如不满足，其他的约束条件也就不必检查了。

求解过程见表 4.9。该表中的约束条件①，②，③分别为式(4.5.1)～(4.5.3)，约束条件④即过滤条件。

表 4.9

点	约束条件		z
$(x_1\ \ x_2\ \ x_3)^T$	④	①②③	
	$3x_1-2x_2+5x_3\geqslant 3$		
$(0\ \ 0\ \ 0)^T$	×		
$(0\ \ 0\ \ 1)^T$	\	\ \ \	5
	$3x_1-2x_2+5x_3\geqslant 5$		
$(0\ \ 1\ \ 0)^T$	×		
$(0\ \ 1\ \ 1)^T$	×		
$(1\ \ 0\ \ 0)^T$	×		
$(1\ \ 0\ \ 1)^T$	\	\ \ \	8
	$3x_1-2x_2+5x_3\geqslant 8$		
$(1\ \ 1\ \ 0)^T$	×		
$(1\ \ 1\ \ 1)^T$	×		

表中，"×"号表示相应的约束条件不满足，"\"号表示相应的约束条件满足。

上述求解 0-1 规划的简便方法比传统的穷举法计算效率要高。

本例题的最优结果是：

$$x_1=x_3=1,\ x_2=0,\ \max\ z=8$$

习　题

1. 求解

$$\min z = -5x_1 + 7x_2 + 10x_3 - 3x_4 + x_5$$
$$\text{s.t.} \quad -x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 - 4x_5 \geqslant 0$$
$$-2x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 2x_5 \leqslant -4$$
$$-x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 \geqslant 2$$
$$x_i = 0,1;\ i = 1,2,3,4,5$$

2. 求解

$$\max z = x_1 + 3x_2 + 10x_3$$
$$\text{s.t.} \quad 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leqslant 15$$
$$x_1 \leqslant 4$$
$$x_2 \leqslant 2$$
$$x_3 \leqslant 3/2$$
$$x_i \geqslant 0 \text{ 整数},\ i = 1,2,3$$

3. 求解：

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4$$
$$\text{s.t.} \quad 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 8x_4 = 16$$
$$x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 7x_4 = 3$$
$$x_i \geqslant 0 \text{ 整数},\ i = 1,2,3,4$$

4. 用分支定界法求解

$$\max z = x_1 + 2x_2$$
$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 \leqslant 0.9$$
$$-2x_1 - x_2 \leqslant 0.2$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0, \text{整数}$$

5. 用分支定界法求解

$$\max z = 3x_1 + 3x_2 + x_3$$
$$\text{s.t.} \quad x_1 - x_2 + 2x_3 \leqslant 4$$
$$-3x_1 + 4x_2 \leqslant 2$$
$$2x_1 + x_2 - 3x_3 \leqslant 3$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0, \text{整数}, x_3 \geqslant 0$$

6. 用隐枚举法求解下列 0-1 规划问题：

(1)

$$\max z = 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 + 4x_5$$
$$3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 4x_5 \leqslant 6$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 2x_5 \leqslant 0$$
$$x_i = 0 \text{ 或 } 1\ (j = 1,2,3,4,5)$$

(2)

$$\min z = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4$$
$$-4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 0$$
$$-2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 \geqslant 4$$
$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \geqslant 1$$
$$x_j = 0 \text{ 或 } 1,\ (j = 1,2,3,4)$$

5 不完全枚举法

5.1 引 言

“枚举”一词来自组合数学，意思是离散集合中成员的记数与罗列。在数学规划中，“枚举”被理解为可行解的罗列并按目标函数进行比较。在这种意义下，不完全枚举算法就是在可行解集合中找出部分(离散的)解并进行比较，从而获得该子集的(局部)最优解，然后给出局部最优解与全局最优解的某种关系。

如果采用上述定义，那么许多最优化算法，如以遗传算法为代表的各种演化算法，都属于不完全枚举算法。

不完全枚举法最诱人的优点，是对 NP 问题能给出一个多项式时间的算法，一般是给出一个概率统计意义下的多项式时间算法。采用不完全枚举算法求解，不存在计算机能否实现的问题。它需要的操作数是计算机可以接受的。

不完全枚举法的难点在于如何估计局部最优解对全局最优解的误差，或如何论证它至少为概率统计意义下的多项式时间算法。高明的计算方法研究人员不难设计出一个不完全枚举算法；但设计出来的算法倘若还未解决上述“可信赖”问题，研究工作就不能停止。

由第 2 章知道，单纯形法在几何上可解释为寻找 n 维空间凸多面体最高(或最低)顶点的过程，寻找的办法是由一个顶点跃迁到另一个顶点。因此单纯形法可认为是(连续)线性规划的隐式枚举算法。它是 1947 年由 G.B.Dantzig 提出的。1972 年 Klee 和 Minty 用反例证明单纯形法不是一个多项式时间算法。1983 年 S.Smale 才证明单纯形法在概率统计意义下是多项式时间算法。理论和实践的探索研究过程长达 36 年之久。

在整数规划中，多数不完全枚举算法的计算复杂性都是令人满意的，但解答的可信赖程度需要仔细研究。也就是要仔细考察局部最优解(或称准最优解)对全局最优解的关系。研究这种关系的途径大致有两种。

第一种途径是将准优解看做全局最优解的数值近似而估计其误差的变化趋势。设表征问题大小规模的变量数目为 n，$\boldsymbol{Z}_n$ 为局部最优解，$\boldsymbol{Z}^*$ 为全局最优解，则“$\boldsymbol{Z}_n$ 在数值上逼近于 $\boldsymbol{Z}^*$”这句话至少意味着极限等式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\|\boldsymbol{Z}_n-\boldsymbol{Z}^*\|}{n}=0 \tag{5.1.1}$$

成立，其中 $\|\cdot\|$ 表示某种范数。

第二条途径是不考虑等式(5.1.1)的证明，而是对不同的 n 做大量随机实验，统计出多少情况出现 $\boldsymbol{Z}_n=\boldsymbol{Z}^*$。如果绝大多数情况都表明 $\boldsymbol{Z}_n=\boldsymbol{Z}^*$，再在某些合理的设定条件下估计 $\boldsymbol{Z}_n\neq\boldsymbol{Z}^*$ 的概率 $p_n(\boldsymbol{Z}_n\neq\boldsymbol{Z}^*)$。当

$$\lim_{n\to\infty}p_n(\boldsymbol{Z}_n\neq\boldsymbol{Z}^*)=0$$

时，认为 Z_n 在概率统计意义下逼近 Z^*；亦即 Z_n 是 Z^* 的一种(概率)统计近似。

多数行之有效的整数规划不完全枚举解法是统计近似解法。

5.2 大型背包问题的不完全枚举解法

考虑背包问题(KP)

$$\max\left\{\sum_{j=1}^{n} w_j x_j \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} v_j x_j \leqslant V,\quad x_j \text{ 取 } 0 \text{ 或 } 1\right\},$$

其中所有的系数 w_j, v_j 和 V 都是正整数。记(KP)的线性规划松弛问题为(LKP)：

$$\max\left\{\sum_{j=1}^{n} w_j x_j \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} v_j x_j \leqslant V,\quad 0 \leqslant x_j \leqslant 1, j = 1, \cdots, n\right\},$$

不妨设，变量已经过适当的排列，使得

$$\frac{w_1}{v_1} \geqslant \frac{w_2}{v_2} \geqslant \cdots \geqslant \frac{w_n}{v_n}.$$

则容易证明，(LKP)的最优解必可取为如下形式：$(1, \cdots, 1, \lambda, 0, \cdots, 0)$，其中某个 $x_r = \lambda$。称此指标 r 为问题(KP)的界标。设(KP)的最优解为 x^*，定义

$$j' = \min\{j \mid x_j^* = 0,\quad 1 \leqslant j \leqslant n\},$$
$$j'' = \max\{j \mid x_j^* = 1,\quad 1 \leqslant j \leqslant n\},$$
$$j_1 = \min\{j', j''\},$$
$$j_2 = \max\{j', j''\},$$
$$k = \{j_1, j_1 + 1, \cdots, j_2\}.$$

称 k 为(KP)的一个核。通常有 $j_1 = j', j_2 = j''$，不然的话，x^* 呈如下形式：$(1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0)$。假如(KP)的最优解不惟一，取 x^* 是使 $(j_2 - j_1)$ 最小的最优解。称 $(j_2 - j_1)$ 为(KP)的核长。称子问题：

$$\max\left\{\sum_{j \in k} w_j x_j \,\middle|\, \sum_{j \in k} v_j x_j \leqslant V - \sum_{j=1}^{j_1 - 1} v_j,\quad x_j \text{ 取 } 0 \text{ 或 } 1\right\}.$$

为(KP)的核心问题，记作(CKP)。显然，(KP)和(CKP)等价。

Balas 和 Zemel 作过统计试验，随机生成 100 个都含有 10000 个变量的背包问题，发现除极少数问题外，核长都不超过 25。并且发现，当变量的数目足够大以后，核长的平均值与变量的数目无关。同时，他们也用概率论中的方法，证明了以上事实。由此提出了一个解大规模的背包问题的近似算法。它的基本步骤如下：

步骤 1　排列变量，使满足

$$\frac{w_1}{v_1} \geqslant \frac{w_2}{v_2} \geqslant \cdots \geqslant \frac{w_n}{v_n}.$$

步骤 2　解(LKP)，设它的最优解为 $\bar{x}$，界标为 r。

步骤 3　选取一个适当的正整数 θ(一般可取 $\theta = 12$)。

步骤 4　定义

$$I=\{r-\theta, r-\theta+1, \cdots, r-1, r, r+1, r+2, \cdots, r+\theta\},$$
$$I_1=\{r-\theta, r-\theta+1, \cdots, r-1\},$$
$$I_0=\{r+1, r+2, \cdots, r+\theta\}.$$

步骤 5　计算：

$$\overline{v}_i=\max_{k\in I_0} v_k,\ \underline{v}=\min_{k\in I_0} v_k.$$

步骤 6　对每一个 $i\in I_1$，定义

$$\overline{v}_i=\begin{cases} v_i+v_r\overline{x}_r, & \text{当 } v_i+v_r\overline{x}_r\leqslant\overline{v}\text{时}, \\ v_i-v_r(1-\overline{x}_r), & \text{相反}. \end{cases}$$

$$\beta_i=\begin{cases} \overline{v}_i, & \text{当}\overline{v}_i\geqslant\underline{v}\text{时}, \\ -\infty, & \text{当}\overline{v}_i<\underline{v}\text{时}. \end{cases}$$

步骤 7　置$\overline{\boldsymbol{x}}^*$如下：

$$\overline{x}_j^*=\begin{cases} \overline{x}_j, & \text{当 } j\neq r \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } j=r \text{ 时}. \end{cases}$$

步骤 8　若 $i=r$，则步骤终止，$\overline{\boldsymbol{x}}^*$便是要求的(近似最优)解。相反，进行步骤 9。

步骤 9　检查是否存在某个 $k\in I_0$，使得 $v_k\leqslant\beta_i$。若是，则进行步骤 10；否则 $i+1\to i$，然后转到步骤 8。

步骤 10　置$\tilde{\boldsymbol{x}}$如下：

$$\tilde{x}_j=\begin{cases} 0, & \text{当 } j=i \text{ 时}, \\ 1, & \text{当 } j=k \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } j=r, \text{且 } v_i+v_r\overline{x}_r\leqslant\overline{v}\text{时}, \\ 1, & \text{当 } j=r, \text{且 } v_i+v_r\overline{x}_r>\overline{v}\text{时}, \\ \overline{x}_j, & \text{当 } j\neq i,k,r \text{ 时}. \end{cases}$$

步骤 11　若 $\sum_j w_j\tilde{x}_j>\sum_j w_j\overline{x}_j^*$，则用$\tilde{\boldsymbol{x}}$代替$\overline{\boldsymbol{x}}^*$，$i+1\to i$，然后转到步骤 8；若 $\sum_j w_j\tilde{x}_j\leqslant\sum_j w_j\overline{x}_j^*$，则 $i+1\to i$，然后转到步骤 8。

5.3 一维切材问题的不完全枚举解法

5.3.1 切材余量和切材矩阵

典型的一维切材问题在 1.7 节已经提出。但 1.7 节归纳的数学模型是待定参数的线性规划模型，2.9 节对这种模型给出列生成解法。

现在给出一种 0-1 规划模型。沿用 1.7 节的记号，令原材料长度为 l；坯料长度分别为 $l_1, l_2, \cdots, l_m$，对应的坯料需要量分别为 $b_1, b_2, \cdots, b_m$。以

$$n=\sum_{i=1}^m b_i$$

表示坯料的总数，t_i 表示第 i 根坯料的长度。显然有

$$t_i = l_j \quad \forall i: 1 \leqslant i \leqslant n \quad \exists j: 1 \leqslant j \leqslant m.$$

不失一般性，可假定 $t_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为正整数。以 d_M 表示 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 的最大公约数。

可以按任意次序排列这 n 根坯料，设 $l_1, l_2, \cdots, l_m$ 按长度递减顺序排列：

$$l_1 > l_2 > \cdots > l_m.$$

则不完全枚举法常用的排列 π_1 是分段递减排列。如 $b_i \geqslant 2\ (i = 1, 2, \cdots, m)$，则排列 π_1 是

$$\pi_1: t_1 = l_1, t_2 = l_2, \cdots, t_m = l_m;\ t_{m+1} = l_1, \cdots, t_{2m} = l_m; \cdots$$

显然，对 n 根坯料的任一种排列，均有自然假定

$$t_i \leqslant l, i = 1, 2, \cdots, n; \quad \sum_{i=1}^{n} t_i > l.$$

定义 5.1 给定 n 根坯料的一个排列 π，集合

$$\boldsymbol{V}_n(\pi) = (t_1, t_2, \cdots, t_n)^{\mathrm{T}}$$

叫做坯料任务，其中 t_i 表示第 i 根坯料的长度。不强调排列 π 时，$\boldsymbol{V}_n(\pi)$ 简单地记作 $\boldsymbol{V}_n$。$\boldsymbol{V}_n$ 的子集叫子坯料任务。

把 $\boldsymbol{V}_n$ 看成以 $t_1, t_2, \cdots, t_n$，为分量的向量，$\boldsymbol{V}_n$ 也可以叫做任务向量。

定义 5.2 给定正整数 i.

$$\boldsymbol{p}_{i,l} = \left(a_{i1}t_1, a_{i2}t_2, \cdots, a_{in}t_n \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} a_{ij}t_j \leqslant l \right)$$

叫做长 l 杆材的第 i 种单切方式，或简称之为单切方式 $\boldsymbol{p}_{i,l}$，其中 a_{ij} 是 0-1 变量 $a_{ij} \in \{0, 1\}$。

单切方式 $\boldsymbol{p}_{i,l}$ 可视为行向量。

定义 5.3 完成坯料任务 $\boldsymbol{V}_n$ 的 k 种单切方式的集合

$$\boldsymbol{P}^k(\boldsymbol{V}_n, l) = \begin{pmatrix} p_{1,l} \\ p_{2,l} \\ \vdots \\ p_{k,l} \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}_n^k$$

叫做 $\boldsymbol{V}_n$ 的切材方式。

定义 5.4 对单切方式 $\boldsymbol{p}_{i,l}$，量

$$\varepsilon_{i,l} = l - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}t_j$$

叫做杆材 l 的第 i 种切方式的单切余量，简称单切余量 $\varepsilon_{i,l}$。

两种切材方式被看作一样的，如果它们的每次单切余量都相等。

定义 5.5 切材方式 $\boldsymbol{P}^k(\boldsymbol{V}_n, l)$ 的全部单切余量之和

$$e_n^k = e(\boldsymbol{P}_n^k) = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_{i,l}$$

叫做 $\boldsymbol{P}^k(\boldsymbol{V}_n, l)$ 的切材余量。

从定义 5.2 和 5.3 容易看出，切材方式 $\boldsymbol{P}_n^k$ 是以 $p_{1,l}, p_{2,l}, \cdots, p_{k,l}$ 为行向量的 $k \times n$ 矩阵：

$$P_n^k = \begin{pmatrix} a_{11}t_1 & a_{12}t_2 & \cdots & a_{1n}t_n \\ a_{21}t_1 & a_{22}t_2 & \cdots & a_{2n}t_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1}t_1 & a_{k2}t_2 & \cdots & a_{kn}t_n \end{pmatrix}.$$

0-1 矩阵

$$A_n^k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}.$$

叫做切材矩阵,其中每一行都叫做单切行。任务向量 V_n 给定后,切材方式完全由切材矩阵确定。令

$$A_{n,i}^k = (a_{i1}, a_{i2}\cdots, a_{in}), I_k = (\underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{n})^{\mathrm{T}}, L_k = lI_k = (l, l, \cdots, l)^{\mathrm{T}}. \tag{5.3.1}$$

则有

$$A_{n,i}^k V_n \leqslant l,\ (\varepsilon_{1,l}, \varepsilon_{2,l}, \cdots, \varepsilon_{k,l})^{\mathrm{T}} = L_k - A_n^k V_n, e_n^k = I_k^{\mathrm{T}}(L_k - A_n^k V_n). \tag{5.3.2}$$

在上述定义和记号下,一维切材问题可等价地被描述成

$$\begin{aligned} &\min k \\ &\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}t_j \leqslant l, a_{ij} \in \{0,1\}, i = 1,2,\cdots,k, \\ &\quad\ \sum_{i=1}^{k} a_{ij} = 1, j = 1,2,\cdots,n. \end{aligned} \tag{5.3.3}$$

注意,问题(5.3.3)中 a_{ij} 也是未知的 0-1 变量,而目标函数是完成坯料任务 V_n 的最少单切方式数目。(5.3.3)的解可能不惟一。对应于(5.3.3)之解的每种切材方式 $P^k(V_n, l)$ 叫做最优切材方式,其切材矩阵叫做最优切材矩阵,$k^* = \min k$ 叫做最少耗材量。

定理5.1 切材方式 P_n^k 为最优的,当且仅当其切材余量 e_n^k 为最小时。

证明:从公式(5.3.2)及问题(5.3.3)的约束知

$$e_n^k = I_k^{\mathrm{T}}(L_k - A_n^k V_n) = I_k^{\mathrm{T}} L_k - I_k^{\mathrm{T}} A_n^k V_n = kl - \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}t_j = kl - \sum_{j=1}^{n} t_j. \tag{5.3.4}$$

显然,按等式(5.3.4),$\min k$ 等价于 $\min e_n^k$.

推论 5.1 切材方式 P_n^k 为最优的,当且仅当其平均切材余量 $\overline{e}_n^k = e_n^k / k$ 为最小时。

证明:由等式(5.3.4),

$$\overline{e}_n^k = e_n^k / k = l - \sum_{j=1}^{n} t_j / k.$$

$\min k$ 亦与 $\min \overline{e}_n^k$ 等价。

推论 5.2 切材方式 P_n^k 为最优的,如果其切材余量 e_n^k 小于杆长 l。

证明:若 $e_n^k < l$,则从(5.3.4)知

$$(k-1)l < \sum_{j=1}^{n} t_j$$

这说明 $k-1$ 根杆材不能完成坯料任务 V_n。

定理 5.1 表明在坯料任务给定后,最小耗材量和最小切材余量都是惟一的。

定理 5.2　令

$$k_0=\lceil y\rceil,\ y=\frac{1}{l}\sum_{j=1}^{n}t_j,\quad d_1(V_n)=k_0l-\sum_{j=1}^{n}t_j.$$

切材余量 e_n^k 和平均切材余量 $\overline{e}_n^k$ 分别在由 $n-k_0+1$ 个数组成的有限集合内取其值,即

$$e_n^k\in\{d_1(V_n)+il;i=0,1,\cdots,n-k_0\}$$

$$\overline{e}_n^k\in\left\{\frac{d_1(V_n)+il}{k_0+i};i=0,1,\cdots,n-k_0\right\}=\left\{l-\sum_{j=1}^{n}t_j/(k_0+i);\quad i=0,1,\cdots,n-k_0\right\}\tag{5.3.5}$$

其中$\lceil y\rceil$表示不小于 y 的最小整数。

证明:假定正整数 c 满足

$$\sum_{j=1}^{n}t_j=cl+f,c\geqslant 1,0\leqslant f<l.$$

有

$$k_0=c+\delta(f),\delta(f)=\begin{cases}0, & f=0\\ 1, & f\neq 0\end{cases},\quad d_l(V_n)=l\delta(f)-f.$$

当 k_0 根杆材正好完成坯料任务 V_n,则切材余量 $e_n^k=d_l(V_n)$。另一方面,按自然假定,n 根坯料最多用 n 根杆材切出。因此 e_n^k 和$\overline{e}_n^k$ 在集合(5.3.5)中取其值。

k_0 叫做临界耗材量。

定理 5.2 表明问题(5.3.3)是一个组合优化问题。

按定义 5.5,切材余量是单切余量之和。自然提出一个问题:如果每次单切的余量都最小,问坯料任务完成后切材余量是否最小。回答是否定的。例如,假定 $l=35$,坯料任务 $V_6=(20,11,20,11,20,11)^T$. 第一次最优单切方式是

$$P_{1,l}=(0,11,0,11,0,11),$$

且 $\varepsilon_{1,l}=2$。然而以后的单切方式只能分别是

$$P_{2,l}=(20,0,0,0,0,0),\ P_{3,l}=(0,0,20,0,0,0),\ P_{4,l}=(0,0,0,0,20,0).$$

耗费 4 根杆材,切材余量为 47,这显然是错误的。最优切材方式应该是

$$P_{1,l}=(20,11,0,0,0,0),\ P_{2,l}=(0,0,20,11,0,0),\ P_{3,l}=(0,0,0,0,20,11).$$

只耗费 3 根杆材,切材余量为 12。

还有,具有相同单切余量的不同坯料组合,可能导致不同的耗材量。例如,$l=35$, $V_6=(20,13,10,20,10,20)^T$。若 $P_{1,l}=(20,13,0,0,0,0)$, $\varepsilon_{1,l}=2$,则耗费 3 根杆材,如果 $P_{1,l}=(0,13,10,0,10,0)$, $\varepsilon_{1,l}=2$,则耗费 4 根杆材。

不过,从最小单切余量通常可产生较好的切材方式。

定义 5.6　在第 i 次单切方式中,对应于最小单切余量的单切方式叫做(第 i 次)最优单切方式,记为 $p_{i,l}^*$;最优单切方式 $p_{i,l}^*$产生的单切余量叫做(第 i 次)最优单切余量 $\varepsilon_{i,l}^*$。

最优单切余量 $\varepsilon_{i,l}^*$是惟一的,但最优单切方式却不一定。

定理 5.3　如果坯料任务 V_n 逐次用最优单切方式完成,则这些最优单切方式和最优单切

余量具有下述性质：

（ⅰ）最优单切方式 $p_{i,l}^*$产生的最优单切余量

$$\varepsilon_{i,l}^* < l/2, i=1,2,\cdots,$$

除非 i 是最后一次单切；

（ⅱ）对 $i \geqslant 1$，最优单切余量 $\varepsilon_{i,l}^*$不大于$\varepsilon_{i+1,l}^*$；

（ⅲ）若 $j > i$，则最优单切方式 $p_{i,l}^*$的任何坯料的长度大于最优单切余量$\varepsilon_{i,l}^*$。

证明：令 V_{n-i}为第 i 次最优单切后的子坯料任务。显然，

$$V_{n-i+1} \supset V_{n-i} \supset V_{n-i-1}.$$

利用定义 5.6，这直接推出结论（ⅱ）和（ⅲ）。

现在假设 $\varepsilon_{i,l}^* \geqslant l/2$，则由定义 5.6 知 V_{n-i+1}中任何最优单切方式的余量不小于 $l/2$。这是不可能的，除非 i 是最后一次单切。结论 i)得证。

性质（ⅲ）表明，对于 $i \geqslant 1$，$p_{i+1,l}^*, p_{i+2,l}^*, \cdots$中任何坯料不可能用 $\varepsilon_{i,l}^*$切出。

定理 5.4 如果坯料任务 V_n 逐次用最优单切方式完成，则耗材量不大于 $2k_0$，其中 k_0 为临界耗材量。

证明：假定坯料任务逐次用最优单切方式完成后的耗材量为 k. 利用自然假定和定理 5.3 的性质（ⅰ），知切材余量

$$e_n^k < (k-1)l/2 + l = kl/2 + l/2 = \sum_{j=1}^{n} t_j/2 + e_n^k/2 + l/2,$$

于是

$$e_n^k < \sum_{j=1}^{n} t_j + l.$$

再利用定理 5.2 和定义 5.5，得到

$$(2k_0+1)l \geqslant 2\sum_{j=1}^{n} t_j + l = \sum_{j=1}^{n} t_j + kl - e_n^k + l > kl,$$

因此

$$2k_0 + 1 > k, k \leqslant 2k_0.$$

接近极限 $2k_0$ 是可能的。例如，设坯料任务

$$V_n = (t_1, \cdots, t_n)^{\mathrm{T}}, t_1 = l/2 + \varepsilon, i = 1,2,\cdots,n, n \text{ 是奇数}, 0 < \varepsilon < l/(2n)$$

耗材量 k 显然是 n，此时

$$k_0 = (n+1)/2, 2k_0 = n+1.$$

k 与 $2k_0$ 的差别仅为 1。

定理 5.5 设 $\varepsilon_{1,l}^*$为坯料任务 V_n 的第一次最优单切余量。则完成坯料任务 V_n 至少需要 $k'_0 = \lceil z \rceil \left(z = \sum_{j=1}^{n} t_j/(l - \varepsilon_{1,l}^*) \right)$ 根杆材，其中 l 是杆长，t_j 是坯料长度。

证明：设为 $P_n^k(V_n, l)$任意切材方式且

$$\theta'_0 = k'_0 - \sum_{j=1}^{n} t_j/(l - \varepsilon_{1,l}^*), (0 \leqslant \theta'_0 < 1).$$

由定义 5.6 知单切余量 $\varepsilon_{1,l} \geqslant \varepsilon_{1,l}^* (i = 1,2,\cdots,k)$。因此

$$k'_0(l-\varepsilon_{1,l}^*)-\theta'_0(l-\varepsilon_{1,l}^*)=\sum_{j=1}^{n}t_j=\sum_{i=1}^{k}(l-\varepsilon_{i,l})\leqslant k(1-\varepsilon_{1,l}^*),k\geqslant k'_0.$$

推论 5.3 切材方式 P_n^k 是最优的，如果其切材余量 e_n^k 小于 $l+(k-1)\varepsilon_{1,l'}^*$。

证明：定义 5.6 表明 P_n^k 的切材余量

$$e_n^k=\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_{i,l}\geqslant\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_{1,l}^*=k\varepsilon_{1,l}^*.$$

令 $l'=l-\varepsilon_{1,l}^*$，对于杆长 l 或 l'，完成坯料任务 V_n 的最小耗材量是一样的。如果 $e_n^{'k}=e_n^k-k\varepsilon_{1,l}^*<l-\varepsilon_{1,l}^*$，则由推论 5.2 知 P_n^k 是最优的。

现在将杆长考虑为一个参数 $\xi(\xi\leqslant l)$，则最优单切方式 $p_{i,\xi}^*$ 和最优单切余量 $\varepsilon_{1,\xi}^*$ 都是 ξ 的变量。设 $P^{C_i^0}(V_n,\xi_i^0)$ 为以最优单切方式逐次完成坯料任务的切材方式，ξ_i^0 为杆长，C_i^0 是 $P^{C_i^0}(V_n,\xi_i^0)$ 的耗材量。此处 ξ_i^0 是序列

$$\xi_0^0>\xi_1^0>\cdots>\xi_i^0>\cdots\geqslant l_1 \tag{5.3.6}$$

的第 i 次杆长。ξ_0^0 是坯料的一个组合长度，如 $\xi_0^0=l-\varepsilon_{1,l}^*$，$\varepsilon_{1,l}^*$ 为杆长 l 的第一最优单切余量，l_1 是坯料的最大长度。对坯料任务 V_n，首先考虑 $P^{C_0^0}(V_n,\xi_0^0)$，其第一最优单切余量是 $\varepsilon_{1,\xi_0^0}^*$，然后令 $\xi_1^0=\xi_0^0-\varepsilon_{1,\xi_0^0}^*-d_M$，$\xi_1^0$ 是除 ξ_0^0 之外可能的最大坯料组合长度。一般地，令 $\xi_i^0=\xi_0^0-\sum_{j=0}^{i-1}\varepsilon_{1,\xi_j^0}^*-id_M$，得到切材方式 $P^{C_i^0}(V_n,\xi_i^0)$。设

$$C_{i^*}^0=\min_i\{\min(C_0^0,C_1^0,\cdots,C_i^0,\cdots)\}, \tag{5.3.7}$$

则 $C_{i^*}^0\leqslant C_0^0$，$i^*\geqslant 0$，$P^{C_{i^*}^0}(V_n,\xi_{i^*}^0)$ 是 $P^{C_0^0}(V_n,\xi_0^0)$，$P^{C_1^0}(V_n,\xi_1^0)$，$\cdots$，$P^{C_i^0}(V_n,\xi_i^0)$，$\cdots$ 中较好的切材方式。

从 $P^{C_{i^*}^0}(V_n,\xi_{i^*}^0)$ 中取出 $p_{1,\xi_{i^*}^0}$ 后，再考虑子坯料任务 V_{n-1}。如果在 V_{n-1} 中存在一根坯料 l_s 使得

$$l_s=l_{j_1}+l_{j_2}+\cdots+l_{j_w},w\geqslant 2,l_{j_r}\in p_{1,\xi_{i^*}^0}(r=1,2,\cdots,w),l_{j_1}\leqslant l_{j_2}\leqslant\cdots\leqslant l_{j_w} \tag{5.3.8}$$

则 $p_{1,\xi_{i^*}^0}$ 的坯料 $l_{j_1},l_{j_2},\cdots,l_{j_w}$ 应当用 l_s 替代，这是因为 $l_{j_1},l_{j_2},\cdots,l_{j_w}$ 的组合灵活性比 l_s 大。

假定所有形如(5.3.8)的替代已经完成。类似于(5.3.6)～(5.3.8)的过程也可以对子坯料任务 V_{n-1}，V_{n-2}，$\cdots$ 进行。因此，可以获得

$$C_{i^*}^{r}=C_0^r+r\leqslant C_{i^*}^{r-1}+r-1\leqslant\cdots\leqslant C_{i^*}^1+1\leqslant C_{i^*}^0,C_0^r\leqslant 2.$$

$C_{i^*}^{r}$ 叫做杆长 ξ_0^0 的理想耗材量。当 $\xi_0^0\leqslant 1-\varepsilon_{1,l}^*$ 时，它可以被期望为最小耗材量。

理想耗材量被近似地认为是最小耗材量。当然，这种近似是统计意义下的近似，因为许多坯料的组合在选择(5.3.7)及替代(5.3.8)中没有被枚举。

5.3.2 不完全枚举算法

假定任务向量 V_n 的各分量按分段递减 π_1 排列。这种排列适合于求解一个特殊的背包问题，该背包问题等价于求最优单切方式 $p_{i,l}^*$。

求最优单切方式的一般提法如下：给定一根长为 ξ 的杆材及任务向量 $V_r(\pi)=(t_1,t_2,\cdots,t_r)^T$。求杆材 ξ 的最优单切方式使其单切余量最小。设 0-1 变量

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{坯料 } t_j \text{ 被切出,} \\ 0 & \text{坯料 } t_j \text{ 未被切出,} \end{cases}$$

则上述问题等价于

$$\max\ S = \sum_{j=1}^{r} t_j x_j,$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{r} t_j x_j \leqslant \xi,\ x_j \in \{0,1\},\ j = 1,2,\cdots,r. \tag{5.3.9}$$

显然,(5.3.9)是一个特殊的背包问题,其中目标函数与约束条件具有相同的表达式。5.2节给出的算法只需稍加改动即适用于求解问题(5.3.9),留作习题。

过程(5.3.6)~(5.3.8)已经给出一维切材问题的一个具有最小单切余量的不完全枚举算法。该算法由下列步骤组成:

步骤 1　置,$h=0, k^*=2k_0+1, k_\tau=\lfloor l/d_M \rfloor, \xi=k_\tau d_M, \varepsilon'_m=l-\xi, \boldsymbol{V}_s=\boldsymbol{V}_n, S=0$,其中 k_0 为临界耗材量,l 为杆长,d_M 为坯料长度的最大公约数,$\boldsymbol{V}_n$ 为坯料任务,$\lfloor y \rfloor$表示不大于y的最大整数。

步骤 2　用最优单切方式 $p^*_{i,l}(i=1,2,\cdots,k_1)$逐次做出坯料任务 $\boldsymbol{V}_s$ 的准最优单切方式 $\boldsymbol{P}^{k_1}_n$,它是 k_1 个问题(5.3.9)的解。由于定理 5.3.2 和定理 5.3.4,有 $k_0 \leqslant k_1 \leqslant 2k_0$,$\boldsymbol{P}^{k_1}_r$ 的切材矩阵

$$\boldsymbol{A}^{k_1}_r = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k_1 1} & a_{k_1 2} & \cdots & a_{k_1 n} \end{pmatrix},$$

切材余量用(5.3.2)计算,

$$e^{k_1}_r = \boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}_{k_1}(\boldsymbol{L}_{k_1} - \boldsymbol{A}^{k_1}_r \boldsymbol{V}_s),$$

$$\varepsilon_a = \overline{e^{k_1}_r} = \overline{e^{k_1}_r}/k_1,\ \varepsilon_m = \min_{1 \leqslant i \leqslant k_1} \varepsilon_{i,\xi},$$

其中记号 $\boldsymbol{I}_{k_1}$和 $\boldsymbol{L}_{k_1}$的定义如(5.3.1)。通常,$\varepsilon_m = \varepsilon_{1,\xi}$(否则,发出警告并在 $\boldsymbol{A}^{k_1}_r$ 中做行置换使 $\varepsilon_{1,\xi} = \varepsilon_m$)。设

$$h =: h+1,\ \varepsilon_m =: \varepsilon_m + \varepsilon'_m,\ \varepsilon_a =: \varepsilon_a + \varepsilon'_m,\ e^{k_1}_n =: e^{k_1}_n + k_1 \varepsilon'_m.$$

步骤 3　若 $e^{k_1}_r < l$ 或$e^{k_1}_r < l + (k_1 - 1)\varepsilon_m$,则由推论 5.3.2 或推论 5.3.3 知 k_1 是最小耗材量,$\boldsymbol{A}^{k_1}_r$ 是最优切材矩阵。置

$$h_1 = h,\ k^* = k_1 + s,\ h_2 = -s,\ \varepsilon''_m = \varepsilon_m,\ \varepsilon''_a = \varepsilon_a,\ \boldsymbol{A}^* = \sum_{i=1}^{s} \boldsymbol{A}^*_{n,i} + \boldsymbol{A}^{k_1}_r,$$

并转向出口。否则转向步骤 4。

步骤 4　若 $k_1 < k^* - s$,则置

$$h_1 = h,\ k^* = k_1 + s,\ h_2 = s,\ \varepsilon''_m = \varepsilon_m,\ \varepsilon''_a = \varepsilon_a,\ \boldsymbol{A}^* = \sum_{i=1}^{s} \boldsymbol{A}^*_{n,i} + \boldsymbol{A}^{k_1}_r.$$

步骤 5　若 $\varepsilon_m < \varepsilon''_a$,则置 $\varepsilon'_m = \varepsilon_m + d_M, \xi = l - \varepsilon'_m$,并转向步骤 2。否则转向步骤 6。

步骤 6　若 $s \leqslant k^* - 4$,则置

$$s=:s+1,\xi=l-\varepsilon''_m,\varepsilon'_m=\varepsilon''_m,\boldsymbol{V}_s=:\boldsymbol{V}_s-\boldsymbol{p}_{1,l}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{A}_{n,s}^{*}=\boldsymbol{A}_{r,1}^{k}$$

并转向步骤 7。否则转向出口。

步骤 7　对 $l_k\in\boldsymbol{V}_s$ 按长度顺序校核等式(3.5.8)。如果存在若干等式，则完成 $\boldsymbol{V}_s$ 与 $\boldsymbol{p}_{1,l}$，$\boldsymbol{A}_{n,s}^{*}$之间的替换。

步骤 8　转向步骤 2。

算法可以在第 h_1 轮完成坯料任务时得到统计近似最优解。理想耗材量和近似最优切材矩阵分别是 k^* 和 $\boldsymbol{A}^*$。有 $\pm h_2$ 轮完成子坯料任务。因为每完成一轮子坯料任务大约需要 k_0k_τ 次运算，且

$$k_0\approx\sum_{j=1}^{n}t_j/l\approx\sum_{j=1}^{n}t_j/(d_Mk_\tau),k_0^2k_\tau\approx\Big(\sum_{j=1}^{n}t_j/d_M\Big)^2/k_\tau=\alpha n^2\quad(l_m^2\leqslant\alpha ld_M\leqslant l_1^2),$$

所以不完全枚举算法的计算复杂性为 $O(n^2L)$，其中 n 是坯料总数，L 是数据的二进制长度。

习　题

1. 编写近似求解背包问题(5.3.9)的基本步骤。
2. 编制一维切材问题不完全枚举算法的计算机程序。
3. 设 $l=60$，坯料任务 $V_9(\pi_1)=(25,20,11,25,20,11,25,20,11)^{\mathrm{T}}$。用不完全枚举算法求出两种最优切材方式并进行比较。
4. 设 $l=61.5$，坯料任务 $V_{900}(\pi_1)=(25,20,11,25,20,11,\cdots,25,20,11)^{\mathrm{T}}$。用不完全枚举算法求出准最优切材方式；然后用列生成方法(2.9 节)校核它为最优切材方式。

6 若干特殊的整数规划

6.1 任务安排的匈牙利算法

实际中经常会遇到这样的问题:有 n 项不同的任务,恰好 n 个人可承担这些任务。由于每个人的专长不同,故各人完成不同任务所需的代价(比如时间)也不一样。问应安排哪个人去完成哪项任务,可使完成 n 项任务所需的总代价最少?这样一类问题就称为任务安排问题。下面来写出其数学模型。

首先设 0-1 变量 x_{ij}:

$$令\ x_{ij}=\begin{cases}1, & 表示安排第\ i\ 个人去完成第\ j\ 项任务\\ 0, & 表示不安排第\ i\ 个人去完成第\ j\ 项任务\end{cases}$$

用 c_{ij}表示第i 个人完成第j 任务所需的代价数。这里,变量 x_{ij}共$n\times n$ 个,与代价系数 c_{ij}一一对应。

目标函数:

$$\min z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

约束条件:

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1,\qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1,\qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

$$x_{ij}=0\ 或\ 1\qquad (i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$$

约束条件 $\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1$ 表示每项任务必须且只能有一个人承担;而约束条件 $\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1$ 表示每个人必须且只能承担一项任务。从以上数学模型可知,任务安排问题是特殊的 0-1 规划问题,也是特殊的线性规划运输问题。利用该问题的特点,有更简便的解法求解这类问题,它就是匈牙利法。该方法的得名是因为匈牙利数学家狄·科尼格(D. König)为发展这个方法证明了主要定理。

6.1.1 代价矩阵

下面通过例子来说明。

假定代价矩阵为

$$C=(c_{ij})=\begin{matrix}A_1\\A_2\\A_3\\A_4\\A_5\end{matrix}\begin{bmatrix}3&5&5&4&1\\8&4&5&5&5\\6&6&6&3&7\\6&3&3&4&4\\4&4&3&5&5\end{bmatrix}$$
$$\quad J_1\ J_2\ J_3\ J_4\ J_5$$

其中 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 表示工作人员,J_1,J_2,J_3,J_4,J_5 表示任务,c_{ij}为第 i 个工作人员 A_i 从事第 j 项任务 J_j 的代价。可将它转化为与之等价的问题,办法如下:

(a) 取矩阵 C 每行的最小元素,用它作为减数,该行所有元素减去该数,这样一来,每行就至少有一个 0 元素。

(b) 在(a)的基础上,每列减去该列的最小元素,结果得到每列至少有一个 0 元素。由(a),(b)步骤,执行过程:

$$\begin{bmatrix}3&5&5&4&1\\8&4&5&5&5\\6&6&6&3&7\\6&3&3&4&4\\4&4&3&5&5\end{bmatrix}\begin{matrix}1\\4\\3\\3\\3\end{matrix}\xrightarrow{\text{步骤(a)}}\begin{bmatrix}2&4&4&3&0\\4&0&1&1&1\\3&3&3&0&4\\3&0&0&1&1\\1&1&0&2&2\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{步骤(b)}}\begin{bmatrix}1&4&4&3&0\\3&0&1&1&1\\2&3&3&0&4\\2&0&0&1&1\\0&1&0&2&2\end{bmatrix}$$
$$1 \qquad\qquad 15=1+4+3+3+3+1$$

矩阵外的数 1,4,3,3,3 分别是第 1,2,3,4,5 行的最小元素,矩阵下面的 1 为第 1 列最小元素,最后的 15 是这些数之和。各行各列分别减去的这些数称为标志数。

问题转化为代价矩阵

$$C'=(c'_{ij})=\begin{matrix}A_1\\A_2\\A_3\\A_4\\A_5\end{matrix}\begin{bmatrix}1&4&4&3&0^*\\3&0^*&1&1&1\\2&3&3&0^*&4\\2&0&0^*&1&1\\0^*&1&0&2&2\end{bmatrix}$$
$$\quad J_1\ J_2\ J_3\ J_4\ J_5$$

的任务安排问题(C'的特点是每行每列都有 0 元素),理由是,上述转化相当于 A_1 的工作代价一律降 1,A_2 的工作代价一律降 4,A_3,A_4,A_5 的工作代价一律降 3。同时,从事任务 J_1 的工作代价一律再降 1。由于任务安排 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 每人都有一项,且仅有一项任务,每项任务都有一人且仅有一人去做,所以 C 矩阵的任务安排问题等价于C'矩阵的任务安排问题。

任务安排问题看做运输问题的特殊情形。若把 C 矩阵看做运费矩阵,其道理更容易理解,从 A_i 发出的运费都降一样的钱,进入 B_j 的旅费也降一样的,则对应的最佳运输方案也必然是 C'对应的最佳运输方案。

C'有许多 0 元素,每行每列至少有一个 0,若能从 C'中取 5 个 0 元素,使得每行每列都正好有其中一个,比如,$C'_{51},C'_{22},C'_{43},C'_{34},C'_{15}$。即矩阵 C' 中打 * 号的 0,其所在行列均不相同。它给出了问题的最优解:即 A_1 从事 J_5,A_2 从事 J_2,A_3 从事 J_4,A_4 从事 J_3,A_5 从事 J_1,代价为 15。

这 5 个 0 元素是通过观察法得到的，当问题规模较大时，必须有一种算法。下面给出的匈牙利算法就是其中的一种。

6.1.2 科尼格(König)定理

已知 0-1 矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，可适当选择若干行和列，使这些行、列覆盖 A 的所有元素 1，办法不惟一。其中存在使用的行、列数之和 m 为最少的，显然 $m\leqslant n$。

另一方面，从 A 中找出若干元素 1，使得两两不同行也不同列，其中必存在这样的 1 最多者，记为 M，即从 A 中可选出 M 个元素 1，散布在 A 中，使得每行每列最多只有其中的 1 个。关于 m 和 M 有下面的定理。

科尼格定理 $m=M$

证明：$m\geqslant M$ 是显然的，因为 m 条线就能覆盖住所有 1，也必然能覆盖住这 M 个 1 元素。所以只要证明 $M\geqslant m$ 即可。

设这 m 条线中有 r 条是行，c 条是列，即 $m=r+c$，不妨假定这 r 行是 $i_1,i_2,\cdots,i_r$ 行，c 列为第 $j_1,j_2,\cdots,j_c$ 列。

对应于这 r 行中的 i_h 有

$$s_h\triangleq\{l\mid a_{i_h l}=1,\ l\neq j_1,j_2,\cdots,j_c\}$$

即 s_h 是第 i_h 行中元素 1 的列标序列，但不包括属于 c 列：$j_1,j_2,\cdots,j_c$ 的。

于是对 $s_1,s_2,\cdots,s_r$，从中任取 $k(k\leqslant r)$个，它所包含的不同元素(号码)个数不少于 k，否则这 k 行可用少于它的列取代，这与 $m=r+c$ 是最少的行列数矛盾了。这个结论对于 $1\leqslant k\leqslant r$ 都对，根据图论中的匹配理论，故可从这 r 行中找到 r 个 1 分别在不同的 r 列上，而且也不在 $j_1,j_2,\cdots,j_c$ 列中任何一列上。

由类似的理由可知，从 $j_1,j_2,\cdots,j_c$ 列可选出 c 个元素 1 分别在不同的 c 行上，而且也不在 $i_1,i_2,\cdots,i_r$ 行中任何一行上。

故可得 $r+c$ 个 1 两两不在同一行、同一列上，这就证明了 $M\geqslant m$。

6.1.3 标志数法

令 J 为 $1,2,\cdots,n$ 的某一排列 $j_1,j_2,\cdots,j_n$，它对应于一种任务安排方案，即第 1 个工作人员完成 j_1 任务，第 2 个人完成 j_2 任务，…，第 n 个人完成 j_n 任务。

$$W(J)=\sum_{i=1}^{n}c_{ij_i}$$

为其代价。问题导致求排列 J 使 $W(J)$取极小值。

若对 A_i 给以标志数 $l(A_i)$，$i=1,2,\cdots,n$；J_j 给以标志数 $l(J_j)$，$j=1,2,\cdots,n$，满足 $l(A_i)+l(J_j)\leqslant c_{ij}$，$i,j=1,2,\cdots,n$。这样的标志数 $l(A_i)$，$l(J_j)$也不是惟一的，下面假定(c_{ij})是整数矩阵。

定理 6.1 设排列$(j_1,j_2,\cdots,j_n)$使得 $W(J)$取得最小值，则存在标志数 $l(A_i)$，$l(J_j)$，$i,j=1,2,\cdots,n$，使得

$$\min_J W(J)=\max_{(l)}\sum_{i=1}^{n}[l(A_i)+l(J_{j_i})]$$

并且满足

$$l(A_i)+l(J_{j_i})=c_{ij_i}$$

证明：证明是构造性的，也就是证明的过程就是给出算法。

令

$$m=\max_{(l)}\sum_{i=1}^{n}[l(A_i)+l(J_{j_i})]$$

$$M=\min_{(l)}\sum_{i=1}^{n}C_{ij_i}$$

取初始标志数

$$l(A_i)=\min_j(c_{ij}),\ l(J_{j_i})=0,\ i=1,2,\cdots,n$$

所以 $$l(A_i)+l(J_{j_i})\leqslant c_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n}[l(A_i)+l(J_{j_i})]=\sum_{i=1}^{n}[l(A_i)+l(J_j)]\leqslant\sum_{i=1}^{n}c_{ij_i}$$

这式子说明对于任何满足条件 $l(A_i)+l(J_j)\leqslant c_{ij}$ 的标志数 l，则

$$\sum_{i=1}^{n}[l(A_i)+l(J_{j_i})]\not>\sum_{i=1}^{n}c_{ij_i}$$

自然也不大于标志数的最大值 m，所以 $m\leqslant M$。只要能找到一种标志数，使

$$\sum_{i=1}^{n}[l(A_i)+l(J_j)]=\sum_{i=1}^{n}c_{ij_i},$$

即 $m=M$，$J=(j_1,j_2,\cdots,j_n)$ 便是最优解，即 A_i 从事 J_{j_i} 工作，$i=1,2,\cdots,n$，使代价达到最小。

下面提供一种不断修改标志数，逐步提高 $\sum_{i=1}^{n}[l(A_i)+l(J_j)]$ 的和数，最后达到最大。

作矩阵

$$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n},\ b_{ij}=c_{ij}-[l(A_i)+l(J_j)],i,j=1,2,\cdots,n.$$

显然，若 $\boldsymbol{B}$ 存在一组 n 个元素，其中不存在两个 0 元素同行或同列，则这些 0 元素的位置设为 (i,j_j)，即

$$\sum_{i=1}^{n}[l(A_i)+l(J_{j_i})]=\sum_{i=1}^{n}c_{ij_i},\ \text{即}\ m=M$$

即得问题的解。如若不然，$\boldsymbol{B}$ 矩阵只能找到最多 $k(<n)$ 个 0 元素，使得其中任意两个不在同一行或同一列上。根据科尼格定理，这相当于可以找到总数为 k 的行和列，覆盖住所有 $\boldsymbol{A}$ 矩阵中的 0 元素。假定这 k 个行和列分别是 r 行 c 列，$k=r+c$，其中 r 行分别是 $i_1,i_2,\cdots,i_r$；c 列分别是 $j_1,j_2,\cdots,j_c$，对标志数 l 作如下修改：

(a) $A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_r}$ 的标志数不动，其余 $n-r$ 行的标志数分别加 1 作为新的标志数；

(b) $J_{j_1},J_{j_2},\cdots,J_{j_c}$ 的标志数减 1 作为新的标志数，此外的 $n-c$ 列的标志数不变。

$$
\begin{array}{c|cccc|l}
 & J_{j_1} & J_{j_2} & J_q & J_{j_c} & l(A)\downarrow \\
\hline
A_{i_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & l(A_{i_1}) \\
A_{i_2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & l(A_{i_2}) \\
\vdots & & & & & \vdots \\
A_p & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & l(A_p) \\
\vdots & & & & & \vdots \\
A_{i_r} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & l(A_{i_r}) \\
\hline
l(J)\to & l(J_{j_1}) & l(J_{j_2}) & l(J_q) & l(J_{j_c}) &
\end{array}
\xrightarrow{\text{修改 } l}
\begin{array}{c|cccc|l}
 & J_{j_1} & J_{j_2} & J_q & J_{j_c} & l'(A)\downarrow \\
\hline
A_{i_1} & \cdots\oplus\cdots & \cdots\oplus\cdots & \cdots\otimes\cdots & \cdots\oplus\cdots & l(A_{i_1}) \\
A_{i_2} & \cdots\oplus\cdots & \cdots\oplus\cdots & \cdots\otimes\cdots & \cdots\oplus\cdots & l(A_{i_2}) \\
A_p & \cdots\otimes\cdots & \cdots\otimes\cdots & \cdots * \cdots & \cdots\otimes\cdots & l(A_p) \\
A_{i_r} & \cdots\oplus\cdots & \cdots\oplus\cdots & \cdots\otimes\cdots & \cdots\oplus\cdots & l(A_{i_r}) \\
\hline
l'(J)\to & l(J_{j_1})-1 & l(J_{j_2})-1 & l(J_q) & l(J_{j_c})-1 &
\end{array}
$$

其中 A_p 是任意一行，J_q 是任意一列，请注意右端虚线相交的格子点⊗代表在新标志数 l' 下，$l'(A_i)+l'(J_j)=l(A_i)+l(J_i)$的点，⊕代表 $l'(A_i)+l'(J_i)=l'A_i)+l(J_j)-1$ 的点，* 表示 $l'(A_i)+l'(J_j)=l(A_i)+l(J_j)+1$ 的点。

总之，在 l'标志数下，条件：

$l'(A_i)+l'(J_j)\leqslant c_{ij}+1$ 成立。但可能出现新的 0 元素。分别讨论如下：

令 $A_r=(A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_r}),J_c=(J_{j_1},J_{j_2},\cdots,J_{j_c})$

(1) $A_i\in A_r,J_j\in J_c$ 时，

$$l'(A_i)+l'(J_j)=l(A_i)+l(J_j)-1<c_{ij}$$

(2) $A_p\notin A_r,J_q\notin J_c$ 时，

$$l'(A_i)+l'(J_j)=l(A_i)+l(J_j)+1\leqslant c_{ij}+1$$

(3) $A_i\in A_r,J_j\notin J_c$(或 $A_i\notin A_r,J_j\in J_c$)有

$$l'(A_i)+l'(J_j)=l(A_i)+l(J_j)$$

但对于新标号 l'有

$$\sum_{i=1}^{n}[l'(A_i)+l'(J_j)]=\sum_{i=1}^{n}[l(A_i)+l(J_j)]+(n-r)-c$$

即标号和增加了，增加的量为 $n-r-c=n-(r+c)>0$，经过有限次迭代到达最大值。

$$
C=\begin{bmatrix}
3 & 5 & 5 & 4 & 1\\
2 & 3 & 4 & 3 & 4\\
2 & 4 & 4 & 1 & 5\\
3 & 2 & 1 & 3 & 3\\
1 & 2 & 1 & 3 & 3
\end{bmatrix}
\begin{matrix} l(A_i)\downarrow \\ 1\\2\\1\\1\\1\end{matrix}
\qquad
B_1=\begin{bmatrix}
2 & 4 & 4 & 3 & 0^*\\
0^* & 1 & 2 & 1 & 2\\
1 & 3 & 3 & 0^* & 4\\
2 & 1 & 0 & 2 & 2\\
0 & 1 & 0^* & 2 & 2
\end{bmatrix}
$$

$$l(J_j)\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0$$

B_1 被 4 条线所覆盖，故修改标号如下：

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ l(J_j)\to \end{array}\begin{array}{ccccc|c} & & & & & l(A_i)\downarrow \\ 3 & 5 & 5 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & \end{array} \qquad B_2=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 3 & 0^* \\ 0^* & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0^* & 4 \\ 2 & 0^* & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0^* & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

即得任务安排的最优方案：A_1—J_5，A_2—J_1，A_3—J_4，A_4—J_2，A_5—J_3。总代价为

$$\sum_{i=1}^{n}[l(A_i)+l(J_j)]=2+3+2+2+2-4=7$$

这里附带说，从 B_2 找出 5 个 0 元素，分别位于 5 行 5 列，即不存在两个零同行或同列，一般的办法可以看成是对二分图求匹配。

B_2 矩阵中第 1 行有 1 个 0 元素为 b_{15}，则从 A_1 连 J_5 以直线。同样，A_2 行有 2 个 0 元素 b_{21}，b_{22}，则 A_2 与 J_1，J_2 相连，等等，可得二分图(见图 6.1)。其中存在一匹配，即 A_i 和惟一 J_j 有连线(见图 6.2)。寻找匹配的一般算法可参见图论。

本例 A_1 只有一条边 A_1J_5，A_3 也仅有 A_3J_4，从 A_2 出发不难找一交互道：$A_2J_1A_5J_3A_4J_2$。所谓交互道，指一端为 A_i，另一端为 J_j 的道路，故得匹配：

$$A_1—J_5,\ A_2—J_1,\ A_3—J_4,\ A_2—J_2,\ A_5—J_3$$

A_1—J_5 表示 A_1 和 J_5 匹配，余类推。

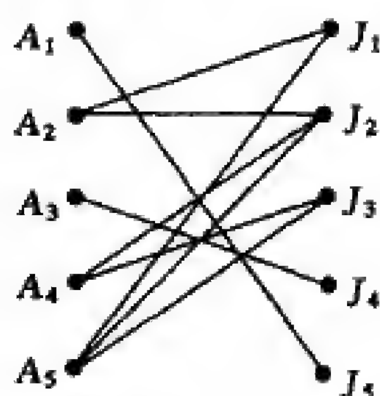


图 6.1

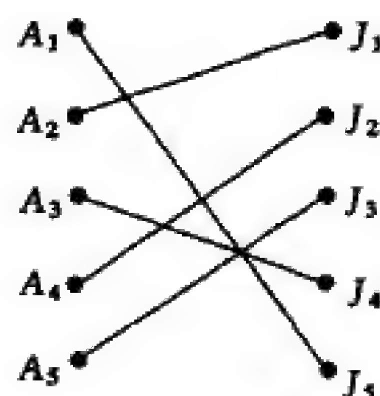


图 6.2

6.1.4 匈牙利算法

一般的任务安排问题

$$\min z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1 \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1 \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

$$x_{ij}=0 \text{ 或 } 1 \qquad (i=1,2,\cdots,n;\quad j=1,2,\cdots,n)$$

下面给出的算法是前面讨论的总结：

S1．初始标志数：$l(A_i) \leftarrow \min\limits_j \{c_{ij}\}, i=1,2,\cdots,n$；$l(J_j) \leftarrow 0, j=1,2,\cdots,n$

S2．构造矩阵 $\boldsymbol{B}_l=(b_{ij}), b_{ij} \leftarrow c_{ij}-l(A_i)-l(J_j),(i,j=1,2,\cdots,n)$。构造二分图 $G_l=(V,E), V=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots y_n\}$，$E=\{(x_i,y_j)\},b_{ij}=0,i,j=1,2,\cdots,n\}$

S3．若能找到图 G_l 的匹配，从 E 中选出 n 条边使 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 每点都与一条边且仅有一条边关联，则已达到最优解，停止；否则转 S4.

S4．找一未饱和点 $x_0 \in \boldsymbol{x}$，作 $V_1 \leftarrow \{x_0\}, V_2 \leftarrow \phi$

S5．若图 G_l 有 $\Gamma(V_1)=V_2$，则转 S6，否则转 S7。

S6．$\alpha \leftarrow \min\{c_{ij}-l(x_i)-l(y_j) \mid x_i \in V_1, y_j \in \Gamma(V_1) \setminus V_2\}$

$$l(v) \leftarrow \begin{cases} l(v)+a & v \in V_1 \\ l(v)-a & v \in V_2 \\ l(v) & \text{其他} \end{cases}$$

构造矩阵 $\boldsymbol{B}_l$ 及二分树 G_l。转 S8。

S7．找 $\boldsymbol{y} \in \Gamma(V_1) \setminus V_2$。

S8．若 $\boldsymbol{y}$ 饱和则转 S9，否则转 S10。

S9．存在饱和边 yx，$V_1 \leftarrow V_1 \cup \{\boldsymbol{x}\}, V_2 \leftarrow V_2 \cup \{\boldsymbol{y}\}$，转 S5。

S10．从 x_0 到 $\boldsymbol{y}$ 有一增广道路 P，作

$$M \leftarrow M \oplus E(P)$$

转 S3。

为了使上述算法更清晰起见，写出流程图如图 6.3 所示。

几点说明：

(1) 饱和：二分图的顶点 x_i 或 y_j 得到匹配，则成为饱和，否则称为未饱和。

(2) $\Gamma(v)$：在图 G_l 中 v 点的邻接点集合。

(3) 增广道路：若道路 $x_{i_1} y_{j_1} x_{i_2} y_{j_2} \cdots x_{i_k} y_{i_k}$ 的首尾二顶点 x_{i_1}, y_{j_k} 未饱和，$y_{j_1}—x_{i_2}, y_{j_2}—x_{i_3},\cdots,y_{j_{k-1}}—x_{i_k}$ 都是匹配边，则称该道路为可增广道路。可改变匹配为：$x_{i_1}—y_{j_1}, x_{i_2}—y_{j_2},\cdots,x_{i_k}—y_{j_k}$，使匹配边数增加。这里 $y—x$ 表示 y 和 x 相匹配。

(4) 对称差⊕：指的是满足规则 $1+1=0+0=0, 1+0=0+1=1$ 的运算，比如

$$M=\{y_{j_1}x_{i_2}, y_{j_2}x_{i_3},\cdots,y_{j_{k-1}}x_{i_k}\}$$

$$E(P)=\{x_{i_1}y_{j_1}, y_{j_1}x_{i_2}, x_{i_2}y_{j_2}, y_{j_2}x_{i_3},\cdots,y_{j_{k-1}}x_{i_k}, x_{i_k}y_{j_k}\}$$

则
$$M \oplus E(P)=\{x_{i_1}y_{j_1}, x_{i_2}y_{j_2},\cdots,x_{i_k}y_{j_k}\}.$$

对于已知利润矩阵的任务安排问题，即已知 $P=(p_{ij})_{n\times n}$，其中 p_{ij} 为 A_i 从事 J_j 的利润，问题导致

$$\max\ z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1, \quad i=1,2,\cdots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1, \quad j=1,2,\cdots,n$$

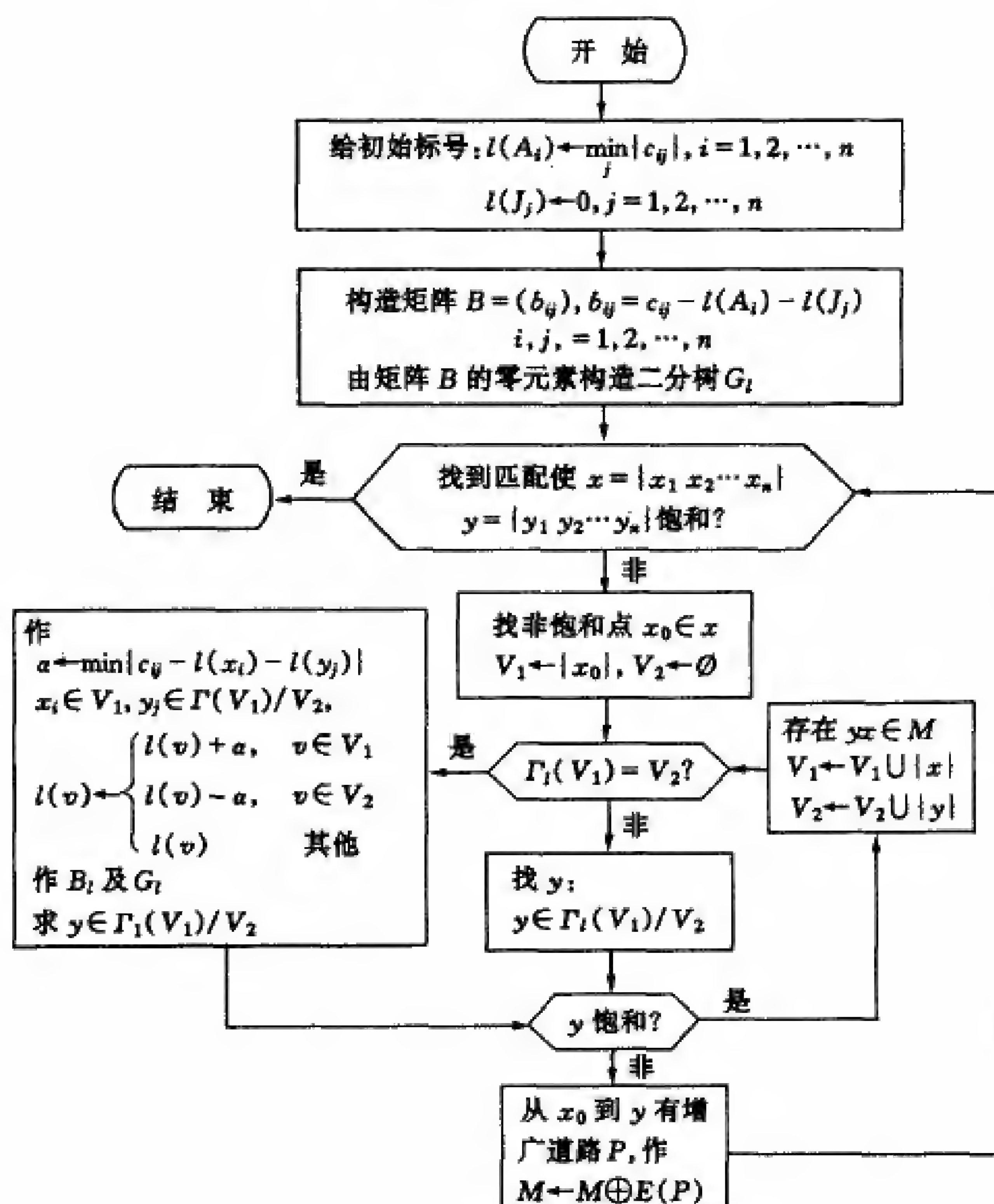


图 6.3

类似可用匈牙利算法求解，不同之点：

(1)初始标志数 $l(A_i)=\max\limits_j\{p_{ij}\}$，$i=1,2,\cdots,n$，$l(J_j)=0$，$i=1,2,\cdots,n$，保证

$$(A_i)+l(J_j)\geqslant p_{ij}$$

(2)$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$，其中 $b_{ij}=l(A_i)+l(J_j)-p_{ij}, i,j=1,2,\cdots,n$

(3)S6 中 $\alpha=\min\{l(A_i)+l(J_j)-p_{ij}\}$，

$$l(v)=\begin{cases} l(v)-\alpha & v\in V_1 \\ l(v)+\alpha & v\in V_2 \\ l(v) & 其他 \end{cases}$$

【例 6.1】 已知利润矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 5 & 7 & 7 & 6 & 3 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

求最佳任务安排。

$$\begin{array}{c} \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad l(A_i) \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\downarrow \\ \begin{bmatrix} 5 & 7 & 7 & 6 & 3 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 4 \\ 6 \\ 3 \\ 5 \end{matrix} \\ l(J_j)\to 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array} \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0^* & 0 & 1 & 4 \\ 0^* & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0^* & 3 & 6 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0^* & 0 \end{bmatrix}$$

取 4 条行列覆盖住矩阵 B 的所有 0 元素，由科尼格定理可知最多只能取 4 个 0 元素，使得两两不同行不同列。例如：$A_1-J_2, A_2-J_1, A_3-J_3, A_5-J_4$

S4．A_4 未匹配，$V_1\leftarrow\{A_4\}$，$V_2\leftarrow\phi$，

S5．$\Gamma_l(V_1)=\{J_2,J_3\}\neq V_2$，$\Gamma_l(V_1)\setminus V_2=\{J_2,J_3\}$

S7．取 J_3，匹配边 $A_3J_3\in M$

S9．所以 $V_1\leftarrow V_1\cup\{A_3\}=\{A_3,A_4\}$

$$V_2\leftarrow V_2\cup\{J_3\}=\{J_3\},\ \Gamma_l(V_1)=\{J_2,J_3\}\neq V_2,$$

$\Gamma_l(V_1)\setminus V_2=\{J_2\}$，取 A_1J_2 匹配边，即

$A_1J_2\in M$，所以 $V_1=\{A_1,A_3,A_4\}$，$V_2=\{J_2,J_3\}$

$\Gamma_l(V_1)=\{J_2,J_3\}=V_2$

$\Gamma(V_1)\setminus V_2=\{J_1,J_4,J_5\}$

$$\alpha=\min_{\substack{A_i\in V_1 \\ J_j\in\Gamma(V_1)\setminus V_2}}\{l(A_i)+l(J_j)-p_{ij}\}=\min_{\substack{i=1,3,4 \\ j=1,4,5}}\{l(A_i)+l(J_j)-p_{ij}\}=1$$

重新更改标志数：$l(A_1)=7-1=6$，$l(A_3)=6-1=5$，$l(A_4)=2$，$l(J_2)=0+1=1$，$l(J_3)=1$

在新的标志数下：

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 5 & 7 & 7 & 6 & 3 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 5 & 5 \end{bmatrix} \\ 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \end{array} \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0^* & 3 \\ 0^* & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0^* & 0 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0^* & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0^* \end{bmatrix}$$

或作出二分树 G_l（见图 6.4）。

即 $A_1—J_4$，$A_2—J_1$，$A_3—J_2$，$A_4—J_3$，$A_5—J_5$ 是最佳安排，利润为 24，本例 $n=5$，B_1 矩阵 0 元素 12 个，找出匹配不难，n 比较大时要有算法，即步骤。

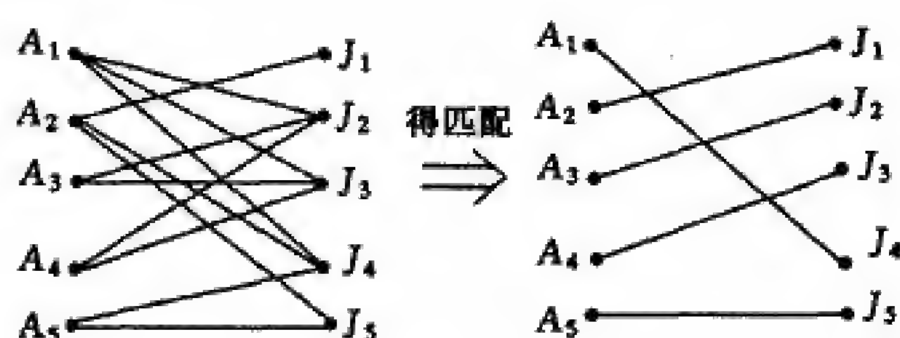


图 6.4

6.1.5 匹配算法

这里附上匹配算法，供使用参考，读者不

难看出其思路和最佳任务安排有类似之处:先给初匹配,然后经过修改,最后达到最大限度的匹配。

算法步骤如下:

S1. 任给初始匹配 M。

S2. 若 x 已完全匹配,则结束;否则转 S3。

S3. 取 $x_0 \in x$,要求 x_0 为未饱和点,作 $V_1 \leftarrow \{x_0\}$, $V_2 \leftarrow \phi$。

S4. 若 $\Gamma(V_1) = V_2$,则无法继续匹配而结束,否则任选 $y \in \Gamma(V_1) \setminus V_2$。

S5. 若 y 已匹配,则转 S6,否则,作

求一条从 x_0 到 y 的可增广道路 P,改变匹配 $M \leftarrow M \oplus E(P)$,转 S2。

S6. 由于 y 已饱和,故 M 中存在匹配边 (y, z),作 $V_1 \leftarrow V_1 \cup \{z\}$, $V_2 \leftarrow V_2 \cup \{y\}$ 转 S4。

以前面的问题为例,如图 6.5 所示,进行 S1 和 S2。



图 6.5

S3. x_4 未匹配,作 $V_1 \leftarrow \{x_4\}$, $V_2 \leftarrow \phi$。

S4. $\Gamma(V_1) = \{y_2, y_3\} \neq V_2$, $\Gamma(V_1) \setminus V_2 = \{y_2, y_3\}$。任选 y_2 已匹配,转 S6。

S6. 存在匹配边 (y_2, y_3), $V_1 \leftarrow \{x_4, x_3\}$, $V_2 \leftarrow \{y_2\}$。

S4. $\Gamma(V_1) = \{y_2, y_3\}$, $\Gamma(V_1) \neq V_2$,从 $\Gamma_l(V_1) \setminus V_2$ 中选 y_3, y_3已匹配。

S6. (x_1, y_3)为已匹配边,作 $V_1 \leftarrow \{x_1, x_4, x_3\}$, $V_2 \leftarrow \{y_2, y_3\}$。

S4. $\Gamma(V_1) = \{y_2, y_3, y_4\} \neq V_2$,取 $y_4 \in \Gamma(V_1) \setminus V_2$, y_4 已匹配。

S6. (x_2, y_4)是匹配边,故 $V_1 \leftarrow \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $V_2 \leftarrow \{y_2, y_3, y_4\}$。

S4. $\Gamma(V_1) = \{y_1, y_2, y_3, y_4\} \neq V_2$,取 $y_1 \in \Gamma(V_1) \setminus V_2$, y_1 未匹配,故存在可增广道路:

$$y_1 \rightarrow x_2 \rightarrow y_4 \rightarrow x_1 \rightarrow y_3 \rightarrow x_4,$$

$$\{x_2y_1, x_2y_4, x_1y_4, x_1y_3, x_4y_3\} \oplus \{x_1y_3, x_2y_4, x_3y_2, x_5y_5\}$$

$$= \{x_2y_1, x_1y_4, x_3y_2, x_4y_3, x_5y_5\}$$

即得匹配:

$$x_1 - y_4, x_2 - y_1, x_3 - y_2, x_4 - y_3, x_5 - y_5$$

6.2 货郎问题

6.2.1 图论术语

图论和组合数学的很多基本问题可以形成为线性整数规划问题。将线性规划的理论和方法应用到图论、组合数学以及计算机科学后,获得了很多深刻的结果,产生了深远的影响,并由此而发展成一个很活跃的分支——组合最优化。下面,首先介绍一些有关的基本概念。

一个图 G 是由两个集合 V 和 E 所组成的,记作 $G=[V,E]$, $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$称为点集,它的元素 v 称为G 的点。$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$称为边集,它的元素 e 是某个无序的点对,称为 G 的边,若 $e=[v_i,v_j]$是一条边,则称 v_i,v_j 是互相关联的,它们是 e 的两个端点,同时也称 e 是点 v_i 或 v_j 的关联边,关联于点 v 的边的集合记作$\delta(v)$,关联于点 v 的点的集合记作$\Gamma(v)$,称 $\delta(v)$中的边数$|\delta(v)|$为点 v 的度(或次),记作 $d(v)$。通常记

$$\delta=\min_{v\in V}d(v),\ \Delta=\max_{v\in V}d.$$

两条边 e_k,e_l 若有一个公共的端点,则称 e_k 和 e_l 是互相关联的。两个图 $G=[V,E]$, $G'=[V',E']$,若 $V'\subseteq V$, $E'\subseteq E$,则称 G'是G 的一个子图。对 $V'\subseteq V$,称图 $G_{V'}=[V',U]$为 G 的 V'导出子图,其中

$$U=\{[v_i,v_j]\mid v_i,v_j\in V',[v_i,v_j]\in E\}.$$

一个具有 n 个点的图,若每一对点都互相关联,则称其为完全图,记作 K_n. 如果 G 的点集 V 能够划分为两个不交的子集 V_1 与 V_2 之和,使得 G 的每一条边都关联于 V_1 和 V_2 中的各一个点,则称 G 是一个二部图。对图 $G=[V,E]$,称图 $\bar{G}=[V,\bar{E}]$为 G 的补图。其中

$$\bar{E}=\{[v_i,v_j]\mid[v_i,v_j]\notin E\}.$$

点子集 $X\subseteq V$,若使其中的点,两两互不关联,则称 X 为图的一个点无关集,在各个点无关集中,使所含的点数达到最大的,称为最大点无关集,而它所含的点数称为图的点无关数。通常记作 β_0。边子集 $X\subseteq E$,若使其中的边,两两互不关联,则称 X 为图的一个边无关集。在各个边无关集中,使所含的边数达到最大的,称为最大边无关集,而它所含的边数称为图的边无关数,记作 β_1。点子集 $S\subseteq V$,若使得图中任意一个边,至少与 S 中一个点相关联,则称 S 为图的一个点覆盖集。在各个点覆盖集中,使所含的点数达到最小的,称为最小点覆盖集。它所含的点数称为图的点覆盖数,记作 α_0。边子集 $S\subseteq E$,若使得图中任意一个点,至少与 S 中一个边相关联,则称 S 为图的一个边覆盖集,在各个边覆盖集中,使所含的边数达到最小的,称为最小边覆盖集。它所含的边数称为图的边覆盖数,记作 α_1。点子集 $K\subseteq V$,若使 K 的导出子图G_K 是一完全图,则称点集 K 为图的一个团。含点数最多的团,称为图的最大团,它所含的点数称为图的团数,记作 ω。一个图的团数等于它的补图的点无关数。图的点着色问题是要求用最少的颜色去染点,每个点染一种颜色,且使得凡是染有同一种颜色的点都互不关联,即构成一点无关集,点着色问题所需要用最少的颜色数目,称为图的点色数,记作 χ_0。图的边着色问题是要求用最少的颜色去染边,每条边染一种颜色,且使得凡是染有同一种颜色的边都互不关联,边着色问题所需要的最少的颜色数目,称为图的边色数,记作 χ_1。补图 $\bar{G}$ 的点色数称为 G 的团覆盖数,记作 κ. 对图 G,定义它的点-边关联矩阵 $\boldsymbol{A}^G=(e_{ij})(i=1,2,\cdots,n,j=1,\cdots,m)$如下:

$$e_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若边 } e_j \text{ 关联于点 } v_i,\\ 0, & \text{相反。}\end{cases}$$

称如下形式的不同边的序列 μ:

$$[v_{j_1},v_{j_2}][v_{j_2},v_{j_3}][v_{j_3},v_{j_4}]\cdots[v_{j_{p-1}},v_{j_p}]$$

为连结点 v_{j_1}和 v_{j_p}的一条链。称 $v_{j_1}=v_{j_p}$的链为一个圈。若链中所经过的各个点 v_{j_k}(除 v_{j_1}和 v_{j_p}外)都互不相同,则称其为初级链。若圈中所包含的各个点 v_{j_k}都互不相同,则称其为初级圈。若对任何的点 $v_i,v_k\in V(i\neq k)$,至少存在一条连结 v_i 和 v_k 的链,则称 G 为连通图。一

个不含圈的连通图,称为一个树。对图 $G=[V,E]$,以及给定的一个点 $v_i\in V$,定义:

$$E^i=\{e_j\mid e_j\in E,\text{ 且存在一条包含边 } e_j \text{ 和点 } v_i \text{ 的链}\},$$

$$V^i=\{v_k\mid v_k\in V,\text{ 且存在一条包含点 } v_i \text{ 和 } v_k \text{ 的链}\}.$$

称子图 $G^i=[V^i,E^i]$为 G 的包含点 v_i 的一连通片。一条包含图中所有的点的初级链,称为哈密尔顿链。一个包含图中所有的点的初级圈,称为哈密尔顿圈。

6.2.2 图论中的一些极大、极小问题

给定一个图 $G=[V,E]$, $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$, $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$,设 $A^G=(e_{ij})$是 G 的点边关联矩阵。对任意的子集 $X\subseteq V$,定义向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$如下:

$$x_i=\begin{cases}1, & \text{若 } v_i\in X\\ 0, & \text{若 } v_i\notin X.\end{cases}$$

称 x 为 X 的关联向量。对任意的子集 $Y\subseteq E$,定义向量 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_m)^T$ 如下:

$$y_i=\begin{cases}1, & \text{若 } e_i\in Y\\ 0, & \text{若 } e_i\notin Y.\end{cases}$$

称 y 为 Y 的关联向量,设 $\mathscr{I}=\{I^1,\cdots,I^s\}$是所有的点无关集所构成的子集簇,设 $\mathscr{D}=\{K^1,\cdots,K^t\}$是所有的团所构成的子集簇,让矩阵 $F=(f_{ij})$表示子集簇 $\mathscr{I}$的关联矩阵,即

$$f_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若 } v_j\in I^i\\ 0, & \text{若 } v_j\notin I^i\end{cases}$$

$(i=1,2,\cdots,s,j=1,2,\cdots,n)$。让矩阵 $D=(d_{ij})$表示子集簇 $\mathscr{D}$ 的关联矩阵,即

$$d_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若 } v_j\in K^i\\ 0, & \text{若 } v_j\notin K^i\end{cases}$$

$(i=1,2,\cdots,t,j=1,2,\cdots,n)$。利用上述符号,可把图的很多基本参数描写成规划形式。

最大点无关集:

让 x 表示点无关集的关联向量,则

$$\beta_0=\max\left\{\sum_i x_i\,\middle|\,\sum_i e_{ij}x_i\leqslant 1, j=1,\cdots,m, x_i\text{ 取 0 或 1}\right\}$$

最大边无关集:

让 y 表示边无关集的关联向量,则

$$\beta_1=\max\left\{\sum_j y_j\,\middle|\,\sum_j e_{ij}y_j\leqslant 1, i=1,\cdots,n, y_j\text{ 取 0 或 1}\right\}$$

最小点覆盖集:

让 x 表示点覆盖集的关联向量,则

$$\alpha_0=\min\left\{\sum_i x_i\,\middle|\,\sum_i e_{ij}x_i\geqslant 1, j=1,\cdots,m, x_i\text{ 取 0 或 1}\right\}$$

最小边覆盖集:

让 y 表示边覆盖集的关联向量,则

$$\alpha_1=\min\left\{\sum_j y_j\,\middle|\,\sum_j e_{ij}y_j\geqslant 1, i=1,\cdots,n, y_i\text{ 取 0 或 1}\right\}$$

最大团:

让 x 表示团的关联向量，则

$$\omega = \max\left\{ \sum_j x_j \,\middle|\, \sum_j f_{ij}x_j \leqslant 1,\ i = 1,\cdots,s,\ x_j \text{ 取 } 0 \text{ 或 } 1 \right\}$$

点色数：

让 $u = (u_1, \cdots, u_s)$，u_i 取 0 或 1，则

$$\chi_0 = \min\left\{ \sum_{i=1}^{s} u_i \,\middle|\, \sum_i u_i f_{ij} \geqslant 1,\ j = 1,\cdots,n,\ u_i \text{ 取 } 0 \text{ 或 } 1 \right\}$$

在上述各整数规划中，若将 0，1 变量放松为非负变量，则可得如下的六个对应的图论线性规划问题。

$$\bar{\beta}_0 = \max\left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j \,\middle|\, \boldsymbol{x}\mathbf{A}^G \leqslant \mathbf{1}, \boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0} \right\},$$

$$\bar{\beta}_1 = \max\left\{ \sum_{j=1}^{m} y_j \,\middle|\, \mathbf{A}^G\boldsymbol{y} \leqslant \mathbf{1}, \boldsymbol{y} \geqslant \mathbf{0} \right\},$$

$$\underline{\alpha}_0 = \min\left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j \,\middle|\, \boldsymbol{x}\mathbf{A}^G \geqslant \mathbf{1}, \boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0} \right\},$$

$$\underline{\alpha}_1 = \min\left\{ \sum_{j=1}^{m} y_j \,\middle|\, \mathbf{A}^G\boldsymbol{y} \geqslant \mathbf{1}, \boldsymbol{y} \geqslant \mathbf{0} \right\},$$

$$\bar{\omega} = \max\left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j \,\middle|\, \boldsymbol{F}\boldsymbol{x} \leqslant \mathbf{1}, \boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0} \right\},$$

$$\underline{\chi}_0 = \min\left\{ \sum_{i=1}^{s} u_i \,\middle|\, \boldsymbol{u}\boldsymbol{F} \geqslant \mathbf{1}, \boldsymbol{u} \geqslant \mathbf{0} \right\},$$

其中1表示分量都为1的向量。

利用线性规划对偶理论，可得关系式：

$$\alpha_1 \geqslant \underline{\alpha}_1 = \bar{\beta}_0 \geqslant \beta_0,$$
$$\alpha_0 \geqslant \underline{\alpha}_0 = \bar{\beta}_1 \geqslant \beta_1,$$
$$\omega \leqslant \bar{\omega} = \underline{\chi}_0 \leqslant \chi_0.$$

上述各 0-1 规划定义域的整点凸包是什么？它们在什么情况下，和对应的松弛线性规划问题有同样的最优解，因而，上述不等式关系都成为等式？这是图论和组合优化中，一个共同关心的问题。

考虑线性规划问题的约束条件：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0}.$$

$\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 的矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的秩为 m。假如对任意的基 $\boldsymbol{B}$，行列式 $|\boldsymbol{B}| = 1$ 或 -1，那么，只要 $\boldsymbol{A}$ 是整数矩阵，$\boldsymbol{B}^{-1}$ 也必是整数矩阵。只要 $\boldsymbol{b}$ 又是整数向量，那么，对应的基本解也必是整数解。对任给的整数矩阵 $\boldsymbol{A}$，若 $\boldsymbol{A}$ 中任意阶的子行列式都取值 0，+1 或 -1，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是全单位模的。容易证明，若 $\boldsymbol{A}$ 是全单位模的，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 和 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I})$ 等都是全单位模的，其中 $\boldsymbol{I}$ 表示单位矩阵。若 $\boldsymbol{A}$ 是全单位模的，则约束集合

$$\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0}, \boldsymbol{b} \text{ 为整数向量}\},$$

或

$$\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \mathbf{0} \leqslant \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{d}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d} \text{ 为整数向量}\},$$

或

$$\{x \mid Ax \leqslant b, 0 \leqslant x \leqslant d, b, d \text{ 为整数向量}\}$$

等的所有基本允许解都是整数解。

定理 6.2 设 A^G 是图 G 的点边关联矩阵,若 G 不含圈,则 A^G 是全单位模的。

证明:考虑 A^G 的任一 r 阶子行列式 $|D|$, $D=(d_{ij})$。若 $r=1$,显然, $|D|=1$ 或 0。现在,设对阶数小于 r 的任何子行列式 $|D'|$,都使 $|D'|=1, -1$ 或 0。若 $|D|$ 中有一行或一列全为零,则 $|D|=0$。若 $|D|$ 中有一行或一列只含一个 1,则将 $|D|$ 按此行列式展开,可得 $|D|=\pm|D'|$,其中 $|D'|$ 为 $(r-1)$ 阶子行列式,由归纳假设,命题即可得证。若 $|D|$ 中每行每列至少含 2 个 1,则在 D 中必能依次找出一个如下形式的,数值都为 1 的元素序列:

$$d_{i_1j_1}, d_{i_1j_2}, d_{i_2j_2}, d_{i_2j_3}, \cdots, d_{i_{k-1}j_k}, d_{i_kj_k}, d_{i_kj_1}。$$

因为 A^G 是点边关联矩阵,所以

$$[v_{i_1}, v_{i_2}], [v_{i_2}, v_{i_3}], \cdots, [v_{i_{k-1}}, v_{i_k}], [v_{i_k}, v_{i_1}]$$

都是 G 中的边,且构成了一个圈,与假设矛盾。证毕。

定理 6.3 设 A^G 是图 G 的点边关联矩阵,若 G 是二部图,则 A^G 是全单位模矩阵。

证明:设 G 的点集 $V=V_1\cup V_2$, $V_1\cap V_2=\phi$, V_1 和 V_2 都是 G 的点无关集。对 A^G 中任一 $r\times r$ 的子矩阵 D,让 D_i 表示 D 中对应于点 V_i 的那一行。若 D 的每一列中都含有两个 1,则因 G 是二部图,必有:

$$\sum_{v_i\in V_1} D_i = \sum_{v_i\in V_2} D_i$$

因此, $|D|=0$。若 D 中有某一列全为零,则显然 $|D|=0$;若 D 中有某一列只含一个 1,则将 $|D|$ 按此列展开,可得 $|D|=\pm|D'|$, D' 为 $(r-1)\times(r-1)$ 的子矩阵,因此,应用数学归纳法,命题即可得证。证毕。

定理 6.4 设 $G'=[V',E']$ 是含有 r 个点, r 个边的连通图, A' 是 G' 的点边关联矩阵。设已知 $|A'|\neq 0$。则 $|A'|=\pm 2$。

证明:显然 $r\geqslant 3$,且当 $r=3$ 时,命题显然成立。现在,假设当 G' 的点数小于 r 时,命题成立,从而要证明点数为 r 时也成立。

(i) 若 G' 中有某一点的度为 1,则 A' 中有某一行只含一个 1。将 $|A'|$ 按此行展开后,可得 $|A'|=\pm|D|$,其中 D 是 G' 中去掉这度为 1 的点及其关联边后的连通子图的关联矩阵,由归纳假设,可知 $|A'|=\pm|D|=\pm 2$。

(ii) 若 G' 中各点的度都不小于 2,则有

$$2r = 2|V'| \leqslant \sum_{v\in V'} d(v) = 2|E'| = 2r.$$

因此,各点的度都为 2。又因为 G' 是连通图,故必是一个初级圈。经过适当地交换行和列的次序后, $|A'|$ 可排列成如下的形式:

$$|A'| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & \\ & 1 & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & 1 \\ 1 & & & & & 1 \end{vmatrix}$$

现在将$|A'|$按第一列展开后，可得

$$|A'| = |D_1| + (-1)^{r-1}|D_2|,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

因此

$$|A'| = 1 + (-1)^{r-1}.$$

当 r 为偶数时，$|A'| = 0$，当 r 为奇数时，$|A'| = \pm 2$。证毕。

当 G 是二部图时，由定理 6.3 可知，关联矩阵 A^G 是全单位模的，由此，容易推知，对应的前四个图论线性规划问题的所有基本允许解都是 0,1 解。因此，这时有关系

$$\beta_0 = \bar{\beta}_0 = \underline{\alpha}_1 = \alpha_1, \quad \alpha_0 = \underline{\alpha}_0 = \bar{\beta}_1 = \beta_1.$$

这就是图论中著名的 D.König 定理。

定理 6.5 对线性规划问题的约束条件

$$\{x \mid Ax = b, x \geqslant 0\}, \tag{6.2.1}$$

若对任意的0,1向量 $c = (c_1, \cdots, c_n)$问题

$$\min\{cx \mid Ax = b, x \geqslant 0\}$$

都有最优解，则条件(6.2.1)的所有基本允许解都是整数解。

证明：设 x^* 是(6.2.1)的任一基本允许解。设 x^* 的非基变量的指标集合为 J。取 $c^* = (c_1^*, \cdots, c_n^*)$如下：

$$c_j^* = \begin{cases} 1, j \in J \\ 0, j \notin J, \end{cases}$$

则

$$\min\{c^* x \mid Ax = b, x \geqslant 0\} = c^* x^* = 0.$$

而且，x^* 是惟一的最优解。由定理的假设，x^* 必是整数解。证毕。

图 $G = [V, E]$的一个边无关集 $X \subseteq E$，若它又是一个边覆盖集，则称 X 是一个完美匹配。有时，也简称为匹配。

让 $y = (y_1, \cdots, y_m)^T$ 表示完美匹配的关联向量，则根据定义，y 必须满足条件

$$y \geqslant 0, \tag{6.2.2}$$

$$A^G y = 1, \tag{6.2.3}$$

$$y \text{ 是0,1向量} \tag{6.2.4}$$

反之，任何满足(6.2.2)～(6.2.4)的 y，必是某个完美匹配的关联向量。

以后，也就称满足(6.2.2)～(6.2.4)的 y 为完美匹配。

一个子集 $T\subseteq V$,若它所含的点数$|T|$是奇数,则称 T 为奇点集。定义

$$E(T)=\{e\in E\mid e=[v_i,v_k],v_i\in T,v_k\in T\},$$
$$\delta(T)=\{e\in E\mid e=[v_i,v_k],v_i\in T,v_k\notin T\}.$$

容易证明,对任意的完美匹配 y 和任意的奇点集 T,必须满足条件

$$\sum_{e_j\in E(T)} y_j\leqslant\frac{|T|-1}{2}, \tag{6.2.5}$$

或

$$\sum_{e_j\in \delta(T)} y_j\geqslant 1. \tag{6.2.6}$$

通常称(6.2.5)或(6.2.6)为奇点集条件。

6.2.3 2-匹配多面体

对给定的图 $G=[V,E]$图中的一条哈密尔顿链是各点的度为 2 或 1 的连通子图,图中的一个哈密尔顿圈是各点的度为 2 的连通子图,这里,放弃其中的连通性条件,研究各点的度为 2 或 1 的子图。让 $b_v(v\in V)$是给定的 1 或 2 的正整数。对任意的子集 $T\subseteq V$,让

$$b(T)=\sum_{v\in T} b_v.$$

研究满足下述条件的 y 所构成的集合:

$$\sum_{e\in\delta(v)} y(e)=b_v,\ v\in V, \tag{6.2.7}$$
$$y(e)\geqslant 0,\ e\in E,$$
$$y(e)\text{取整数},\ e\in E,$$
$$y(e)\leqslant 1,\ e\in E.$$

若所有的 $b_v=1$,则它的解 y 就是G 的完美匹配。若所有的 $b_v=2$,则它的解 y 称为G 的2-匹配。

一个子集 $T\subseteq V$,$|T|\geqslant 2$,若使 $b(T)$是奇数,则称 T 为奇集。对任意的子集 $T\subseteq V$,若使存在(6.2.7)的某非负整数解 y,满足

$$\sum_{e\in\delta(T)} y(e)=0,$$

则

$$b(T)=\sum_{v\in T} b_v=2\sum_{e\in E(T)} y(e),$$

即 T 不是奇集。因此,对(6.2.7)的任何非负整数解 y 以及任何奇集 T,必有

$$\sum_{e\in\delta(T)} y(e)\geqslant 1.$$

称上述不等式为奇集条件。通常总假设 V 不是奇集,否则(6.2.7)无非负整数解。因此,若 T 是一个奇集,$|T|\neq 1$,$|T|\neq|V|-1$ 那么,$\bar{T}=V\setminus T$ 也是奇集。

定义多面体 F_G:

$$\sum_{e\in\delta(v)} y(e)\geqslant b_v,\ v\in V$$
$$y(e)\geqslant 0,\ e\in E,$$
$$\sum_{e\in\delta(T)} y(e)\geqslant 1,\text{对任意的奇集 } T.$$

定理 6.6 F_G 的任何顶点 y 必是整数解。

证明:见参考文献[6]。

本节的中心问题——图 $G=[V,E]$中的 2-匹配。记满足下述条件的 y 所构成的集合为 O_G:

$$y(\delta(v))=2,\ v\in V, \tag{6.2.8}$$
$$y(e)\geqslant 0,\ e\in E$$
$$y(e)\leqslant 1,\ e\in E$$
$$y(e)\text{取整数值},e\in E$$

容易看出,O_G 是由所有的 2-匹配(的关联向量)所构成的集合。

对任意的子集 $S\subset V$,以及 $F\subseteq\delta(S)$,若 $y\in O_G$,则有关系式

$$y(\delta(S))\geqslant y(F),$$
$$|F|\geqslant y(F)$$
$$y(\delta(S))+|F|\geqslant 2y(F). \tag{6.2.9}$$

由(6.2.8)的两边对 S 中的点求和,可得

$$2y(E(S))+y(\delta(S))=2|S|,$$

故 $y(\delta(s))$必是非负偶数。

现在,若$|F|$是奇数,则由(6.2.9)可得关系式

$$y(\delta(S))+|F|\geqslant 2y(F)+1. \tag{6.2.10}$$

即

$$2|S|-2y(E(S))+|F|\geqslant 2y(F)+1.$$

由此可得

$$y(E(S))+y(F)\leqslant |S|+\frac{|F|-1}{2}. \tag{6.2.11}$$

通常称集合“S,F”($S\subset V,F\subseteq\delta(S),|F|$为奇数)为一个“梳子”,称关系式(6.2.11)是一个“S,F 梳子”不等式。

记满足下述条件的 y 所构成的多面体为$\overline{O}_G$:

$$y(\delta(v))=2,\ v\in V,$$
$$y(e)\geqslant 0,\ e\in E,$$
$$y(e)\leqslant 1,\ e\in E.$$
$$y(E(S))+y(F)\leqslant |S|+\frac{|F|-1}{2},\text{对所有的“}S,F\text{ 梳子”}.$$

称 $\overline{O}_G$ 为 2-匹配多面体。

定理 6.7 $\overline{O}_G$ 的任一顶点 y 必定是 G 的一个 2-匹配(即 $y\in O_G$)。

证明:在每个边 $e=[v,w]$内插入两个新的点 p_e 和 q_e,用三条新的边

$$e'_0=[v,p_e],e'_1=[p_e,q_e],e'_2=[q_e,w]$$

代替 e,得到一个新的图 $G'=[V',E']$,在 V'上,定义 b'_v 如下,

$$b'_v=\begin{cases}2, & v'\in V',\\ 1, & v'\in(V'\setminus V).\end{cases}$$

考察满足下述条件的 y'所构成的集合 $b_{G'}$:

$$y'(\delta(v'))=b'_v,\ v'\in V',$$
$$y'(e')\geqslant 0,\ e'\in E'$$
$$y'(e')\text{取整数值},e'\in E'.$$

因为对应于每个 $e\in E$,有关系式

$$y'(e'_0)+y'(e'_1)=y'(e'_1)+y'(e'_2)=1,$$

所以

$$y'(e'_0)=y'(e'_2),$$
$$y'(e')\leqslant 1,\ e'\in E'.$$

对任一 $y\in O_G$,作

$$y'(e'_0)=y'(e'_2)=y(e),\ e\in E, \tag{6.2.12}$$
$$y'(e'_1)=1-y(e),\ e\in E. \tag{6.2.13}$$

则 $y'\in b_{G'}$。反之,对任一 $y'\in b_{G'}$,作

$$y(e)=y'(e'_0),\ e\in E,$$

则 $y\in O_G$。因此,O_G 中的 y 与 $b_{G'}$ 中的 y' 存在一一对应。根据定理 6.6,$b_{G'}$ 中的 y' 便是多面体 F'_G:

$$y'(\delta(v'))=b_{v'},\ v'\in V',$$
$$y'(e')\geqslant 0,\ e'\in E',$$
$$y'(\delta(T'))\geqslant 1,\ \text{对所有的奇集}\ T'\subset V'$$

的顶点。

考察任一 $e=[v,w]\in E$,以及任一奇集 $T'\subset V'$,若 v 和 $w\in T'$,p_e 和 $q_e\notin T'$,则 $T''=T'\cup\{p_e,q_e\}$ 也是一个奇集,且

$$y'(\delta(T'))\geqslant y'(\delta(T'')).$$

这时,对应于 T' 的奇集条件是多余的。若 $v,w,p_e\in T'$,$q_e\notin T'$(或若 $v,w,q_e\in T'$,$p_e\notin T'$),则

$$y'(\delta(T'))\geqslant y'(e'_1)+y'(e'_2)=1.$$

这时,对应于 T' 的奇集条件也是多余的。因此只需考虑这样的奇集 T',它与任何 e 之间,只有如下三种不同的关系:

(i) $\{e'_0,e'_1,e'_2\}\cap\delta(T')=\phi$;

(ii) $\{e'_0,e'_1,e'_2\}\cap\delta(T')=\{e'_1\}$;

(iii) $\{e'_0,e'_1,e'_2\}\cap\delta(T')=\{e'_0\}$ 或 $\{e'_2\}$;

对应于任意的奇集 T',定义

$$S=\{v\in V\mid v\in T'\}$$
$$F=\{e\mid e\in E,e\in\delta(S),e'_1\in\delta(T')\}$$

则根据情形(ⅰ),(ⅱ),(ⅲ),不难证明

$$\sum_{v'\in T'}b_{v'}\equiv|F|\ (\mathrm{mod}2),$$

因此,$|F|$ 是奇数,利用变换(6.2.12),(6.2.13),奇集条件

$$y'(\delta(T'))\geqslant 1.$$

可以写为

$$\begin{aligned} y'(\delta(T')) &= y'(\delta(T') \setminus F) + y'(F) \\ &= y(\delta(S) \setminus F) + \sum_{e \in F} (1 - y(e)) \\ &= y(\delta(S)) - y(F) + |F| - y(F) \\ &= y(\delta(S)) - 2y(F) + |F| \\ &\geqslant 1. \end{aligned}$$

因此，G' 上的奇集条件等价于 G 上的“S, F”梳子条件(6.2.10)或(6.2.11)。在变换(6.2.12)，(6.2.13)下，$F_{G'}$中的y'与$\overline{O}_G$ 中的y 建立了一一对应，且使 $F_{G'}$中的顶点对应于$\overline{O}_G$中的顶点，$F_{G'}$中的 0,1 解对应于 $\overline{O}_G$ 中的 0,1 解，再根据定理 6.6，命题即可得证。证毕。

6.2.4 货郎问题的基本概念和性质

一个货郎，从家出发，要经过若干个预先确定的村子，然后回到家。假定已经知道，每两个村子的距离。问应该如何选择行走路线，使得经过每个要去的村子，且使总行程最短？用图论语言，可叙述如下：给定图 $G=[V,E]$及边长 $d(e)(e\in E)$，寻求 G 的一个使边长之和最小的哈密尔顿圈。以后，把哈密尔顿圈简写为“H-圈”。由于理论和实际的需要，近 40 年来，货郎问题成为运筹学中的几个重要问题之一。

1954 年，G.B.Dantzig, D, R.Fulkerson 和 S.M.Johnson 通过引入“子圈不等式”，首先将货郎问题形成为一个线性整数规划问题。

不妨设 G 是一个完全图(那些不属于原来图上的边的长度都取足够大的值)。定义完全对称的有向图 $G=(V,U)$如下：

$$U=\{(i,j)\mid i\neq j,\ i\in V,\ j\in V\}.$$

弧(i,j)和(j,i)的长度都等于边$[i,j]$的长度，记作 $d_{ij}(=d_{ij})$。定义 0,1 变量 x_{ij}如下：

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{货郎的路线是从 } i \text{ 走到} j,\\ 0, & \text{相反,}\end{cases}$$

则货郎问题可以写成如下的 0,1 规划形式：

求：
$$\min \sum_{i\neq j} d_{ij}x_{ij},$$

满足条件

$$\begin{aligned} &\sum_{i,\, i\neq j} x_{ij}=1,\ j\in V\\ &\sum_{j,\, j\neq i} x_{ij}=1,\ i\in V\\ &\sum_{i\in S}\sum_{j\in S,\, j\neq i} x_{ij}\leqslant |s|-1,\ \phi\neq s\subset V,\ s\neq V \end{aligned}$$

所有的 x_{ij}取 0 或 1。

1973 年，V.Chvátal 根据哈密尔顿圈(H-圈)是一个连通的 2 匹配，将货郎问题形成为另外一种形式的线性整数规划问题。

设 $G=[V,E]$是 n 个点的完全图。$\boldsymbol{A}$ 是G 的点边关联矩阵。$d(e)(e\in E)$表示边 e 的长度。对任意的 $\varnothing\neq W\subset V$，定义

$$E(W)=\{[i,j]\mid i\neq j,\ i\in W,\ j\in W\}.$$

$\boldsymbol{a}(W)$表示集合 $E(W)$(对于边)的关联向量。

$\delta(v)$表示关联于 v 的边的集合，$v\in V$。

$$x(e)=\begin{cases}1, & \text{所求的 H-圈经过 } e\in E,\\ 0, & \text{相反}\end{cases}$$

则货郎问题可以写成如下的 0,1 规划形式

求：
$$\min \sum_{e\in E} d(e)x(e),$$

满足条件

$$\sum_{e\in\delta(v)} x(e)=2,\ v\in V\ (\text{即 } \boldsymbol{Ax}=2\,\boldsymbol{1}),$$
$$\sum_{e\in E(W)} x(e)\leqslant |W|-1,\ \phi\neq W\subset V$$
$$(\text{即 } \boldsymbol{a}(W)\boldsymbol{x}\leqslant |W|-1,\ \phi\neq W\subset V).$$
所有的 $x(e)$ 取 0 或 1.

因为 2-匹配的凸包是

$$\sum_{e\in\delta(v)} x(e)=2,\ v\in V,$$
$$\sum_{e\in E(s)} x(e)+\sum_{e\in F} x(e)\leqslant |s|+\frac{|F|-1}{2},\text{对所有的梳子“}S,F\text{”},$$
$$0\leqslant x(e)\leqslant 1,\text{对所有的 } e\in E.$$

所以，人们自然地会想到用下述线性规划问题去迫近货郎问题：

$$\min \sum_{e\in E} d(e)x(e)$$

满足条件

$$\sum_{e\in\delta(v)} x(e)=2,\ v\in V,$$
$$\sum_{e\in E(s)} x(e)+\sum_{e\in F} x(e)\leqslant |s|+\frac{|F|-1}{2},\text{对所有的梳子“}S,F\text{”},$$
$$\sum_{e\in E(W)} x(e)\leqslant |W|-1,\ \phi\neq W\subset V,$$
$$0\leqslant x(e)\leqslant 1,\text{对所有的 } e\in E.$$

V.Chvátal 称上述问题为弱货郎问题。

让 K_n 表示 n 个点 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的完全图，Q_T^n 表示 K_n 中的哈密尔顿(H-圈)的关联向量的凸包。下面将证明弱货郎总是问题中的约束条件，都是 Q_T^n 的边界面。

首先，请读者自己证明图论中的一个性质：

性质 1 设 $G=[V,E]$ 是 n 个点的完全图，k 表示非负整数。

(i) 若 $n=2k+1$，则 G 中存在 k 个边互不相交的 H-圈，$T_1,T_2,\cdots,T_k$，使得

$$E=T_1\cup T_2\cup\cdots\cup T_k$$

(ii) 若 $n=2k$，则 G 中存在边互不相交的 $k-1$ 个 H-圈 $T_1,T_2,\cdots,T_{k-1}$ 以及一个(完美)匹配 M，使得

$$E=T_1\cup T_2\cup\cdots\cup T_{k-1}\cup M$$

性质 2 当 $n\geqslant 3$ 时，多面体(凸包)Q_T^n 的维数 $\dim Q_T^n$ 为 $\frac{1}{2}n(n-3)$。

证明 当 $n=3$ 时，只有一个哈密尔顿圈，Q_T^n 是一个点，因此，$\dim Q_T^n=0$。

因为对任意的 $x\in Q_T^n$ 有 $\boldsymbol{Ax}=2\,\boldsymbol{1}$，所以

$$\dim Q_T^n \leqslant \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{1}{2}n(n-3).$$

为了证明等式成立，只须说明 Q_T^n 中包含$\frac{1}{2}n(n-3)+1$ 个线性无关的 H-圈的关联向量。

(a) 设 $n=2k+2$，k 为正整数。让 K_{n-1}表示 $n-1$ 个点$\{1,2,\cdots,n-1\}$的完全图。根据性质 1，它的边集合可以分解成 k 个互不相交的，长度都为 $n-1$ 的 H-圈之和：

$$E = T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_k,$$

对每个 $T_i = \langle i_1, i_2, \cdots, i_{n-1}, i_1 \rangle$，利用在边$[i_r i_{r+1}]$中间插入 n 点的办法，构成 $n-1$ 个长度都为 n 的 H-圈 $T_{ir}(r=1,2,\cdots,n-1)$：

$$T_{i1} = \langle i_1, n, i_2, \cdots, i_{n-1}, i_1 \rangle,$$
$$T_{i2} = \langle i_1, i_2, n, \cdots, i_{n-1}, i_1 \rangle,$$
$$\vdots$$
$$T_{i,n-2} = \langle i_1, i_2, \cdots, i_{n-2}, n, i_{n-1}, i_1 \rangle,$$
$$T_{i,n-1} = \langle i_1, i_2, \cdots, i_{n-1}, n, i_1 \rangle,$$

在它们(关于边)的关联矩阵中，包含一个$(n-1)\times(n-1)$的，如下形式的子矩阵：

$$\boldsymbol{J}_{n-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

全部 $T_{ij}^*(i=1,\cdots,k; j=1,\cdots,n-1)$的关联矩阵中，包含一个 $k(n-1)\times k(n-1)$的如下形式的子矩阵：

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} J_{n-1} & & & & \\ & J_{n-1} & & & \boldsymbol{0} \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & & & J_{n-1} \end{bmatrix}$$

因为 $k(n-1) = \frac{1}{2}n(n-3)+1$，$|J| \neq 0$ 所以，

$$\dim Q_T^n = \frac{1}{2}n(n-3).$$

(b) 设 $n=2k+1$，k 为大于 1 的整数。让 K_{n-1}表示 $n-1$ 个点$\{1,2,\cdots,n-1\}$的完全图。根据性质 1，它的边集合可以分解成 $k-1$ 个互不相交的 H-圈：$\{T_1, T_2, \cdots, T_{k-1}\}$，以及一个匹配 M 之和。不妨设

$$M = \{[1,2],[3,4],\cdots,[n-2,n-1]\}.$$

与情形(a)中相似，使用在 T_i 的边中间插入点 n 的办法，可以构成$(k-1)(n-1)$个长度都为 n 的 H-圈 $T_{ij}(i=1,2,\cdots,k-1; j=1,2,\cdots,n-1)$.

定义

$$T_k = \langle 1,2,3,\cdots,n-2,n-1,1 \rangle,$$

使用在 $T_k \cap M$ 的边中间插入点 n 的办法，构成 k 个长度为 n 的 H-圈 $T_{kj}(j=1,2,\cdots,k)$：

$$T_{k1}=\langle 1,n,2,3,\cdots,n-2,n-1,1\rangle,$$
$$T_{k2}=\langle 1,2,3,n,4,\cdots,n-2,n-1,1\rangle,$$
$$\vdots$$
$$T_{kk}=\langle 1,2,3,\cdots,n-2,n,n-1,1\rangle,$$

不难证明，全部 T_{ij}的关联矩阵中，包含一个

$$[(k-1)(n-1)+k]\times[(k-1)(n-1)+k]$$

的如下形式的子矩阵：

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix} J_{n-1} & & & & \\ & J_{n-1} & & \boldsymbol{0} & \\ & & \ddots & & \\ & \boldsymbol{0} & & J_{n-1} & \\ & & & & J_k \end{bmatrix}$$

因为$(k-1)(n-1)+k=\frac{1}{2}n(n-3)+1$，$|J|\neq 0$，所以 $\dim Q_T^n=\frac{1}{2}n(n-1)$．证毕。

性质 3 对 Q_T^n 的每一个边界面F，必存在向量 $\boldsymbol{a}\geqslant\boldsymbol{0}$及数 $a_0\geqslant 0$，使得

$$x\in Q_T^n \Rightarrow \boldsymbol{ax}\leqslant a_0,$$
$$F=\{x \mid x\in Q_T^n,\ \boldsymbol{ax}=a_0\}.$$

证明：因为

$$x\in Q_T^n \Rightarrow \sum_{e\in E} x(e)=n,$$

所以，对 $x\in Q_T^n$，条件 $\boldsymbol{ax}\leqslant a_0$ 等价于

$$(\boldsymbol{a}+\lambda\ \boldsymbol{1})\boldsymbol{x}\leqslant a_0+\lambda n,\ \lambda\in z_+^1.$$

因此，不妨设 Q_T^n 的所有边界面条件$\boldsymbol{ax}\leqslant a_0$ 都满足 $\boldsymbol{a}\geqslant\boldsymbol{0}$。

性质 4 设 $\boldsymbol{ax}\leqslant a_0$ 是 Q_T^n 的一个边界面条件，$\boldsymbol{a}\geqslant\boldsymbol{0}$．记

$$E_a=\{e\in E \mid a(e)>0\},$$
$$N_a=\{i\in V \mid i\text{ 是}E_a\text{ 中某个边的端点}\},$$
$$G_a\geqslant[N_a,E_a],$$

则或者 G_a 是一个连通子图；或者，对 Q_T^n 而言，存在两个等价于 $\boldsymbol{ax}\leqslant a_0$ 的边界面条件，

$$\boldsymbol{bx}\leqslant b_0 \text{ 和 } \boldsymbol{cx}\leqslant c_0$$

使得

$$\boldsymbol{b}\neq 0\neq \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\ a_0=b_0+c_0,$$

且 $\boldsymbol{a}$ 不能表示成$\lambda\boldsymbol{b}$．

证明：设 G_a 不连通，$[V_1,E_1]$是 G_a 中的某个连通子图。显然，$|V_1|\geqslant 2$。定义

$$b(e)=\begin{cases} a(e), & e\in E_1, \\ 0, & \text{相反} \end{cases}$$
$$b_0=\max\{\boldsymbol{bx} \mid x\in Q_T^n\},$$
$$V_2=V\setminus V_1,$$

$$E_2=\{[i,j]\in E \mid i\in V_2,\ j\in V_2\},$$

$$c(e)=\begin{cases}a(e), & e\in E_2,\\ 0, & \text{相反}\end{cases}$$

$$c_0=\max\{cx \mid x\in Q_T^n\},$$

显然，$b\geqslant 0, c\geqslant 0, b\neq 0, c\neq 0, a=b+c, a_0\leqslant b_0+c_0$，$a$ 不能表示成 λb 或 λc，$bx\leqslant b_0$ 和 $cx\leqslant c_0$ 都是 Q_T^n 的分离面，且存在 H-圈 T_1 和 T_2，使得它们的关联向量 x^{T_1} 和 x^{T_2} 满足

$$bx^{T_1}=b_0 \text{ 和 } cx^{T_2}=c_0.$$

由于 b 和 c 的非负性；由于对任何的 $e\notin E_1\cup E_2$，均有

$$b(e)=c(e)=a(e)=0$$

又由于 G 是完全图，不妨设 $T_1\cap E_1$ 和 $T_2\cap E_2$ 分别是子图 $[V_1,E_1]$ 和 $[V_1,E_2]$ 中的 H-链。适当地选取一些 $E\setminus(E_1\cup E_2)$ 中的边，可将链 $T_1\cap E_1$ 和 $T_2\cap E_2$ 串联起来，得到一个 H-圈 T_3，使得 $(T_1\cap E_1)\subset T_3$，$(T_2\cap E_2)\subset T_3$，且使它的关联向量 x^{T_3} 满足

$$bx^{T_3}=b_0,\ cx^{T_3}=c_0,\ b_0+c_0=ax^{T_3}\leqslant a_0.$$

因此，$a_0=b_0+c_0$.

现在，假如有某个 H-圈 T_4，使它的关联向量 x^{T_4} 满足 $ax^{T_4}\leqslant a_0$，但是，

$$bx^{T_4}<b_0 \text{ 或者 } cx^{T_4}<c_0,$$

那么，

$$a_0=ax^{T_4}=bx^{T_4}+cx^{T_4}<b_0+c_0=a_0.$$

自相矛盾。故对任意的 $x\in Q_T^n$，有

$$cx=a_0\Rightarrow bx=b_0 \quad \text{和} \quad cx=c_0.$$

证毕。

性质 5 设 A 是完全图 K_n 的(点-边)关联矩阵。设 $ax<a_0$ 是 Q_T^n 的一个分离。记

$$H(a)=\{x \mid x\in Q_T^n,\ ax=a_0\}.$$

设 $H(a)\neq\emptyset$。则下述两条件等价：

(i) $H(a)$ 是 Q_T^n 的一个边界面(即不等于 Q_T^n 的极大面)。

(ii) 对 Q_T^n 的任何分离 $a'x\leqslant a'_0$，当满足：$H(a')\supseteq H(a)$，$H(a')\neq Q_T^n$ 时，就有 $\lambda\in R^n$ 及 $\pi\neq 0$ 数，使得 $\lambda A+\pi a=a'$。

证明：(i) ⇒ (ii)。因为 $H(a)$ 是一个不等于 Q_T^n 的极大面，且 $Q_T^n\neq H(a')\supseteq H(a)$，所以 $H(a')=H(a)$。因为存在某 $x', x''\in Q_T^n$，使得

$$Ax'=2\mathbf{1},\ a'x'<a'_0,\ ax'<a_0,$$

$$Ax''=2\mathbf{1},\ a'x''=a'_0,\ ax''=a_0,$$

所以，矩阵，

$$\begin{pmatrix}A\\ a\end{pmatrix} \text{和} \begin{pmatrix}A\\ a'\end{pmatrix}$$

的秩都为 $n+1$。假如方程组 $\lambda A+\pi a=a'$ 无解，那么，矩阵

$$\begin{pmatrix}A\\ c\\ a'\end{pmatrix}$$

的秩为 $n+2$,因此,边界面

$$H(a)=\{x\mid x\in Q_T^n,\ ax=a_0,\ a'x=a'_0\}$$

的维数 $\dim H(a)\leqslant\frac{1}{2}n(n-1)-(n-2)=\dim Q_T^n-2$. 自相矛盾。所以,方程组 $\lambda A+\pi a=a'$ 有使 $\pi\neq0$ 的解。

(ii) ⇒ (i). 选取一个 Q_T^n 的分离 $a'x\leqslant a'_0$,使得 $H(a')$是一个包含 $H(a)$的边界面。因为存在某 $x',x''\in Q_T^n$,使得

$$Ax'=2\,1,\ a'x'<a'_0,\ ax'<a_0,$$

$$Ax''=2\,1,\ a'x''=a'_0,\ ax''=a_0,$$

且存在 $\lambda\in R^n$ 及数 $\pi\neq0$,使得

$$\lambda A+\pi a=a'$$

所以,对任意的 $x\in H(a')$,必有

$$\lambda Ax+\pi ax=a'x=a'_0=a'x''=\lambda Ax''+\pi ax''=\lambda Ax''+\pi a_0,$$

即 $ax=a_0$,

因此,$H(a)=H(a')$。证毕。

性质 6 当 $n\geqslant4$ 时,对任意的 $i,j,1\leqslant i<j\leqslant n$,不等式 $x_{ij}\leqslant1$,是 Q_T^n 的边界面条件。

证明:不失一般性,不妨设 $i=n-1,j=n$。当 $n=4$ 和 5 时,容易直接验证命题成立。

(a)设 $n\geqslant6,n=2k+2,k$ 是大于 1 的整数,让 K_{n-2}表示 $2k$ 个点$\{1,2,\cdots,n-2\}$的完全图。根据性质 1,它的边集合可以分解成$\frac{1}{2}(n-4)$个互不相交的,长度都为 $n-2$ 的 H-圈 $\{T_1,T_2,\cdots,T_{\frac{1}{2}(n-4)}\}$,以及一个匹配 M 之和

(a1)选取其中的一个 H-圈 T_1。不妨设

$$T_1=\langle1,2,3,\cdots,n-3,n-2,1\rangle$$

交错地用链

$$\langle j,n,n-1,j+1\rangle\text{或}\langle j,n-1,n,j+1\rangle$$

依次替换 T_1 中的边$[j,j+1](j=1,\cdots,n-3)$,可得$(n-3)$个长度都为 n 的 H-圈 T_{1j}:

$$T_{11}=\langle1,n,n-1,2,3,4,\cdots,n-3,n-2,1\rangle,$$

$$T_{12}=\langle1,2,n-1,n,3,4,\cdots,n-3,n-2,1\rangle,$$

$$T_{13}=\langle1,2,3,n,n-1,4,\cdots,n-3,n-2,1\rangle,$$

$$\vdots$$

$$T_{1n-3}=\langle1,2,3,4,\cdots,n-3,n,n-1,n-2,1\rangle.$$

(a2)在上述的各个 T_{1j}中,将点 n 与 $n-1$ 的位置交换后,又可得$(n-3)$个长度都为 n 的 H-圈 T'_{ij}:

$$T'_{11}=\langle1,n-1,n,2,3,4,\cdots,n-3,n-2,1\rangle,$$

$$T'_{12}=\langle1,2,n,n-1,3,4,\cdots,n-3,n-2,1\rangle,$$

$$T'_{13}=\langle1,2,3,n-1,n,4,\cdots,n-3,n-2,1\rangle,$$

$$\vdots$$

$$T'_{1n-3}=\langle1,2,3,4,\cdots,n-3,n-1,n,n-2,1\rangle.$$

(a3) 取

$$T'_{1n-2}=\langle 1,2,3,\cdots,n-3,n-2,n,n-1,1\rangle.$$

(a4)串联 M 中的边,扩展成 K_{n-2}中的一个 H-圈 T_M。对 $T_M, T_3, \cdots, T_{\frac{1}{2}(n-4)}$以及 T_M,逐次用链$\langle i,n-1,n,j\rangle$代替圈上的各个边$[i,j]$(对 T_M 只用M 中的边),可得

$$\left[\frac{1}{2}(n-4)-1\right](n-2)+\frac{1}{2}(n-2)$$

个 K_n 中的 H-圈。

综上所述,已构成:

$$(n-3)+(n-3)+1+\left[\frac{1}{2}(n-4)-1\right](n-2)+\frac{1}{2}(n-2)=\frac{1}{2}n(n-3)$$

个 K_n 中的 H-圈,这些 H-圈都包含了边$[n-1,n]$。让 $\boldsymbol{D}$ 表示这些 H-圈的关联矩阵。去掉 D 中对应于下述各边的列:

$[1,n]$, $[n-1,n]$,
$[k,n]$, $2\leqslant k\leqslant n-2$, k 为偶数,
$[k,n-1]$, $1\leqslant k\leqslant n-2$, k 为奇数,

就可得到一个$\left[\frac{1}{2}n(n-3)\right]\times\left[\frac{1}{2}n(n-3)\right]$的子矩阵 $\boldsymbol{D}'$。适当地排列行和列的次序后,$\boldsymbol{D}'$可写成如下的形式:

$$\boldsymbol{D}'=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{R} & \boldsymbol{J}\end{pmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}' & \boldsymbol{N}'\\ 0 & \boldsymbol{J}_{n-2}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{I}'=\begin{pmatrix}1 & & & & \\ 1 & 1 & & \boldsymbol{0} & \\ & 1 & \ddots & & \\ & \boldsymbol{0} & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{J}_{n-2}$和 $\boldsymbol{J}$ 的形式见性质 2 的证明。因为

$$|\boldsymbol{P}|\neq 0,\ |\boldsymbol{J}|\neq 0, \text{所以} |\boldsymbol{D}'|\neq 0.$$

(b)对 $n=2k+1$,k 为大于 2 的整数时,可类似地证明。证毕。

性质 7 当 $n\geqslant 5$ 时,对任意的 i,j,$1\leqslant i<j\leqslant n$,不等式 $x_{ij}\geqslant 0$,是 Q_T^n 的边界面条件。

证明:不失一般性,不妨设 $i=n-2, j=n-1$。当 $n=5$ 和 6 时,容易直接验证命题成立。

(a)在完全图 K_{n-1}上,应用性质 6,可得$\frac{1}{2}(n-1)(n-4)$个,都含有边$[n-2,n-1]$的。线性独立的,长为 $n-1$ 的 H-圈。用链:$\langle n-2,n,n-1\rangle$代替边$[n-2,n-1]$后,就可得到 K_n 中的$\frac{1}{2}(n-1)(n-4)$个线性独立的,都不含边$[n-2,n-1]$的 H-圈。

(b)在 K_{n-1}中任选一个包含链:$\langle n-2,1,n-1,2\rangle$的长为 $n-1$ 的 H-圈。然后将点 n 分别插入边$[n-2,1]$,$[1,n-1]$和$[n-1,2]$后,可得 3 个 K_n 中的 H-圈,它们都不含边$[n-2,

$n-1]$。

(c)对 $3\leqslant i\leqslant n-3$,再任意地构造 $n-5$ 个分别含有$[i,n]$的,但都不含边$[n-2,n-1]$的, K_n 中的 H-圈。

至此,已构成

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-4)+3+(n-5)=\frac{1}{2}n(n-3)$$

个都不含边$[n-2,n-1]$的 H-圈。

不难证明,这些 H-圈的关联矩阵的秩为$\frac{1}{2}n(n-3)$。证毕。

性质 8 设 $G=[V,E]=K_n,n\geqslant 6,W_0=\{u,v,w\}\subset V,W_1=[u,u_1],W_2=[v,v_1]$, $W_3=[w,w_1],F=\{W_1,W_2,W_3\}\subset E$. 则 6 个点的梳子"$W_0,F$"的不等式:

$$x_{uv}+x_{uw}+x_{vw}+x_{uu_1}+x_{vv_1}+x_{ww_1}\leqslant 4$$

是 Q_T^n 的一个边界面不等式。

证明:对 $n=6,7,8$,容易直接验证命题成立。因此,可设 $n\geqslant 9$。不失一般性,不妨设 $u=n,v=n-1,w=n-2,u_1=n-4,v_1=n-3,w_1=1$。

(a)在 K_{n-3}中,应用性质 6,可得$\frac{1}{2}(n-3)(n-6)$个线性独立的,都含有边$[n-4,n-3]$的,长为 $n-3$ 的 H-圈。用链

$$\langle n-4,n,n-2,n-1,n-3\rangle$$

代替$[n-4,n-3]$后,可得恰好包含梳子"W_0,F"中 4 条边的,$\frac{1}{2}(n-3)(n-6)$个 K_n 中的 H-圈。

(b)在 K_{n-3}中,任意的选取一个包含链:$\langle n-4,1,n-3\rangle$的 H-圈,然后,分别用链$\langle n-4,n,n-1,n-2,1\rangle$和$\langle 1,n-2,n,n-1,n-3\rangle$代替边$[n-4,1]$和$[1,n-3]$后,可得恰好包含梳子"$W_0,F$"中 4 条边的 2 个 K_n 中的 H-圈。

(c)在 K_{n-3}中,任意的选取一个包含链$\langle n-4,n-3,1\rangle$的 H-圈,然后,用链$\langle n-3,n-1,n,n-2,1\rangle$代替边$[n-3,1]$后,可得恰好包含梳子"$W_0,F$"中 4 条边的 1 个 K_n 中的 H-圈。

(d)用如下方法构成 $3(n-3)-3$ 个线性独立的 H-圈:

(i)要求它们都经过边$[n-4,n]$,$[n-3,n-1]$和$[1,n-2]$;

(ii)经过$[n-1,n]$以及某个不属于梳子"W_0,F"中的边$[n-2,j]$,$(1\leqslant j\leqslant n-3)$;

或者经过$[n-2,n-1]$以及某个不属于"W_0,F"中的边$[n,j]$,$(1\leqslant j\leqslant n-3)$;

或者经过$[n-2,n]$以及某个不属于"W_0,F"中的边$[n-1,j]$,$(1\leqslant j\leqslant n-3)$。

综上所述,已构成$\frac{1}{2}n(n-3)$个 H-圈,它们都恰好包含"W_0,F"中的 4 条边,且不难证明它们的关联向量线性独立。证毕。

性质 9 设 $n\geqslant 4,K_n=[V,E],W\subset V,2\leqslant |W|\leqslant n-2$. 则条件

$$a(W)x\leqslant |W|-1$$

是 Q_T^n 的一个边界面条件。

证明:不妨设 $n\geqslant 6$ 对 $n=4$ 和 5,容易直接验证。也不妨设 $3\leqslant |W|\leqslant |n-3|$,且 $W=\{1,2,\cdots,k\}$,$3\leqslant k\leqslant n-3$。对$|W|=2$ 或 $n-2$ 时,可由性质 6 推出。

设 $bx \leqslant b_0$ 是 Q_T^n 的任一分离，满足：

$$\{x \in Q_T^n \mid a(W)x = |W|-1\} \subseteq \{x \in Q_T^n \mid bx = b_0\}.$$

下面，将证明存在 $\lambda \in R^n$ 及数 $\alpha > 0$，使得

$$b = \alpha a(W) + \lambda A.$$

由性质 5，命题即可得证。

让 A_F 表示 A 中对应于边集合 F 的列所构成的子矩阵。取

$$F = \{[1,i] \mid i = 2,\cdots,n\} \cup [2,3],$$

则 $|A_F| = \pm 2$，因为对任意的 $\lambda \in R^n$，当 $x \in Q_T^n$ 时，条件

$$\bar{b}x = (\lambda A + b)x \leqslant 2\lambda\ 1 + b_0 = \bar{b}_0,$$

等价于 $bx \leqslant b_0$；又因为 $|A_F| \neq 0$，必可找到一个适当的 λ，使得 $\bar{b}$ 满足：

$$\bar{b}_{1i} = 1,\ i = 2,\cdots,k,$$
$$\bar{b}_{1i} = 0,\ i = k+1,\cdots,n,$$
$$\bar{b}_{23} = 1.$$

下面，说明这时的 $\bar{b}$ 已同时满足条件：

(i) $\bar{b}_{ij} = 1,\ 1 \leqslant i < j \leqslant k$,

(ii) $\bar{b}_{ij} = 0,\ i \in \{1,\cdots,k\};\ j \in \{k+1,\cdots,n\}$,

(iii) $\bar{b}_{ij} = \beta,\ k+1 \leqslant i < j \leqslant n$.

对情形(i)，只看 $\bar{b}_{3k}$。其余的可以完全类似地证明。

考虑两个 H-圈：

$$\tau_1 = \langle 1,k,k-1,\cdots,4,2,3,k+1,\cdots,n,1\rangle,$$
$$\tau_2 = \langle 1,2,4,\cdots,k-1,k,3,k+1,\cdots,n,1\rangle.$$

则 τ_1 和 τ_2 的关联向量 x^{τ_1}和 x^{τ_2}都满足条件：

$$a(W)x = |W|-1.$$

根据假设，因此也都满足条件：

$$\bar{b}x = \bar{b}_0,$$

即

$$0 = \bar{b}x^{\tau_1} - \bar{b}x^{\tau_2} = \bar{b}_{1k} + \bar{b}_{23} - \bar{b}_{12} - \bar{b}_{3k} = 1 - \bar{b}_{3k},\ \bar{b}_{3k} = 1.$$

对情形(ii)，只看 $\bar{b}_{2n}$，其余的可以完全类似地证明。

考虑两个 H-圈：

$$\tau_3 = \langle 1,2,3,4,\cdots,n,1\rangle,$$
$$\tau_4 = \langle 2,1,3,4,\cdots,n,2\rangle,$$

则 τ_3 和 τ_4 的向量 x^{τ_3}和 x^{τ_4}都满足条件：

$$a(W)x = |W|-1.$$

根据假设，因此也都满足条件：

$$\bar{b}x = \bar{b}_0,$$

即

$$0 = \bar{b}x^{\tau_3} - \bar{b}x^{\tau_4} = \bar{b}_{23} + \bar{b}_{1n} - \bar{b}_{13} - \bar{b}_{2n} = -\bar{b}_{2n},$$

对情形(iii)，只证明：

$$\bar{b}_{i,i+1}=\bar{b}_{k+1,n}=\beta,\ (i=k+1,\cdots,n-1).$$

其余的可以类似地证明。

考虑两个 H-圈：

$$\tau_3=\langle 1,2,3,\cdots,k,k+1,\cdots,i,i+1,\cdots,n,1\rangle,$$

$$\tau_5=\langle 1,2,3,\cdots,k,i+1,\cdots,n,k+1,\cdots,i,1\rangle$$

它们的关联向量 x^{τ_3}, x^{τ_5}都满足条件：

$$a(W)x=|W|-1.$$

根据假设,因此也都满足条件：

$$\bar{b}x=\bar{b}_0;$$

即

$$\begin{aligned}0&=\bar{b}x^{\tau_3}-\bar{b}x^{\tau_5}=\bar{b}_{k,k+1}+\bar{b}_{i,i+1}+\bar{b}_{1,n}-\bar{b}_{k,i+1}-\bar{b}_{k+1,n}-\bar{b}_{1,i}\\&=\bar{b}_{i,i+1}-\bar{b}_{k+1,n},\end{aligned}$$

$$\bar{b}_{i,i+1}=\bar{b}_{k+1,n}$$

由条件(i),(ii),(iii),可得

$$\bar{b}x=a(W)x+\beta a(V\setminus W)x,$$

$$\bar{b}_0=\bar{b}x^{\tau_3}=|W|-1+\beta(|V\setminus W|-1),$$

考虑 H-圈：

$$\tau_6=\langle 1,n,2,\cdots,k,k+1,\cdots,n-1,1\rangle$$

因为

$$\bar{b}x^{\tau_6}=|W|-2+\beta(|V\setminus W|-2)\leqslant\bar{b}_0=|W|-1+\beta(|V\setminus W|-1).$$

所以

$$\beta\geqslant-1.$$

取 $\bar{\lambda}\in R^n$ 如下：

$$\bar{\lambda}_i=-\frac{\beta}{2},\ i=1,\cdots,k,$$

$$\bar{\lambda}_i=\frac{\beta}{2},\ i=k+1,\cdots,n.$$

取

$$\bar{\alpha}=1+\beta\geqslant 0,$$

则

$$\bar{b}=\bar{\alpha}a(W)+\lambda A,$$

证毕。

性质 10 设 $n\geqslant 8$, $K_n=[V,E]$,则对任何的梳子"S,F",不等式：

$$\sum_{e\in E(s)}x(e)+\sum_{e\in F}x(e)\leqslant|S|+\frac{|F|-1}{2}$$

是 Q_T^n 的一个边界面条件。

这个定理的证明很长,读者可参阅 M. Grötschel, M. W. Padberg 的文章 "On the symmetric travelling salesman problem", Math. Programming 16.

证明的思路是从最简单的,6 个边的梳子不等式(见性质 8)开始,利用一系列的精致的升

高定理,证明了扩大后的各种梳子不等式仍然是 Q_T^n 的边界面。

6.2.5 算　法

这一节中所介绍的算法,是 M.Grötschel 和 M.W.Padberg 首先提出的。他们综合地运用了分支估界、割平面和整点凸包等概念。而这里所用的割平面是整点凸包的边界面。因此,可以认为是使用了最好的割平面。他们在实际计算时,已收到了很好的效果。虽然,这里的针对货郎问题叙述了算法,但是,程序的框架是适用于一般的整数规划问题的。实际上,M.W.Padberg 等人,也已经开始在背包问题、选址问题、集合覆盖问题等特殊的整数规划问题中,应用了整点凸包边界面作为割平面,建立了新的割平面算法 .

给定图 $G=[V,E]$,以及边长 $d(e),(e\in E)$.

把货郎问题写成如下的 0-1 规划问题(P):

$$\min \sum_{e\in E} d(e)x(e) \tag{6.2.14}$$

满足条件

$$\sum_{e\in\delta(v)} x(e)=2,\ \text{对所有的 } v\in V, \tag{6.2.15}$$

$$\sum_{e\in\delta(s)} x(e)\geqslant 2,\ \text{对所有的 } \phi\neq S\subset V, \tag{6.2.16}$$

$$x(e)\text{取 0 或 1,对所有的 } e\in E, \tag{6.2.17}$$

其中

$$\delta(v)=\{e\mid e\in E,\ e \text{ 关联于 } v\},$$
$$\delta(S)=[S,V\setminus S].$$

记满足(6.2.15)~(6.2.17)的 x 所构成的集合为 $F(P)$。满足(6.2.15)和(6.2.17)的 x 是 2 匹配,它的凸包是:

$$\sum_{e\in\delta(v)} x(e)=2,\ \text{对所有的 } v\in V, \tag{6.2.18}$$

$$\sum_{e\in E(s)} x(e)+\sum_{e\in F}x(e)\leqslant |S|+\frac{|F|-1}{2},\ \text{对所有的梳子“}S,F\text{”} \tag{6.2.19}$$

称问题(6.2.14)~(6.2.16),(6.2.18)~(6.2.19)为货郎问题的线性规划松弛问题,记作($\tilde{P}$)。让一些 $x(e)$的值固定为 1,另一些 $x(e)$固定为 0 后,可得一个子问题。图 6.6 是树形图,表示将(P)分解为三个子问题之和。(P_1)表示已取定了两条边 e_1 和 e_2;(P_2)表示已取定了 e_1,但不取 e_2,等等。

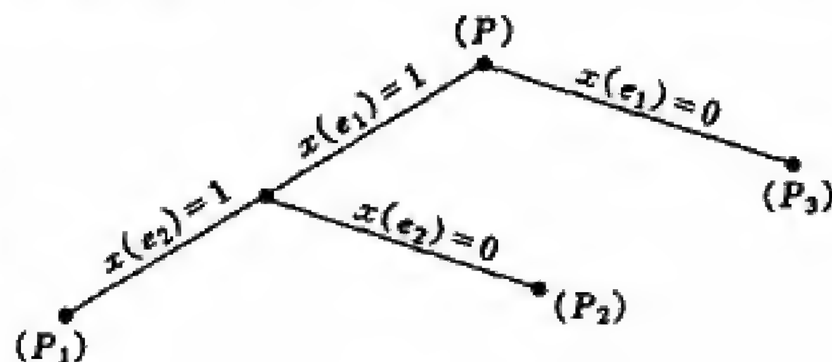


图 6.6

让 π 表示尚未探明的(P)的子问题的记录表。x^* 表示(P)的一个已知的允许解(即某个 H-圈)。x_0^* 表示 x^* 的目标函数值。称 x^* 为记录解,x_0^* 为记录。各子问题,赋予目标函数值的下界估计值。

步骤 1　置 $\pi=\{(P)\},x^*=\phi,x_0^*=+\infty$.

步骤 2　若 $\pi=\phi$,则步骤终止。x^* 便是(P)的最优解(假如存在的话)。否则,进行步骤 3。

步骤 3　从 π 中取出一个使下界值最小的子问题，记作(CP)。$\pi\setminus(CP)\to\pi$.

步骤 4　利用字典序单纯形算法，求解子问题(CP)的松弛问题($\tilde{C}P$)：

$$\min\sum_{e\in E}c(e)x(e),$$

满足条件

$$\begin{aligned}&\sum_{e\in\delta(v)}x(e)=2,\ v\in V,\\&0\leqslant x(e)\leqslant 1,\ e\in E,\\&x(e)=1,\ 若\ x(e)在(CP)中已固定为\ 1,\\&x(e)=0,\ 若\ x(e)在(CP)中已固定为\ 0.\end{aligned}$$

步骤 5　若($\tilde{C}P$)的最小值$\geqslant x_0^*$，则转到步骤 2。否则进行步骤 6。

步骤 6　若求得($\tilde{C}P$)的最优解 $\tilde{x}$ 是一个 H-圈。则转到步骤 12。否则，进行步骤 7。

步骤 7　对应于 $\tilde{x}$，构造一个网络 $\tilde{G}$。让边 e 的容量为$\tilde{x}(e)$．然后，求 $\tilde{G}$ 的最小截集 $\delta(\tilde{S})$。

步骤 8　若 $\sum\limits_{e\in\delta(\tilde{s})}\tilde{x}(e)\geqslant 2$，则转到步骤 10；否则，进行步骤 9。

步骤 9　增加割平面条件：

$$\sum_{e\in\delta(\tilde{s})}x(e)\geqslant 2,$$

改进松弛问题($\tilde{C}P$)，继续用字典序单纯形算法，求($\tilde{C}P$)的最优解。然后，转到步骤 5。

步骤 10　对应于网络 $\tilde{G}$，通过下述方法，构造一个新的网络 $\bar{G}$。

步骤 10.1　首先在 $\tilde{G}$ 的每条边 $e=[v,w]$中间，插入两个新的点 e_v,e_w 得三条边：$[v,e_v]$，$[e_v,e_w]$，$[e_w,w]$。定义边$[e_v,e_w]$的容量为 $Q[e_v,e_w]=1-\tilde{x}(e)$；边$[v,e_v]$和$[e_w,w]$的容量为 $Q[v,e_v]$和 $Q[e_w,w]$。它们都等于 $\tilde{x}(e)$。

步骤 10.2　将 $\tilde{G}$ 中的每个(原来的)点 v，替换成两互不关联的点 v_1,v_2。若$[v,e_v]$是边，则$[v_1,e_v]$和$[v_2,e_v]$都是边，且它们的容量 $Q[v_1,e_v]$和 $Q[v_2,e_v]$都取为 $\tilde{x}(e)$。

步骤 11　求网络 $\bar{G}$ 的最小奇数截集$\delta(\bar{S})$(从定理 4.8 的证明中，知道 $\bar{G}$ 中的奇数截集不等式，对应于 $\tilde{G}$ 中的梳子不等式)。若

$$\sum_{e\in\delta(\bar{s})}Q[e]\geqslant 1,$$

则转到步骤 13；若

$$\sum_{e\in\delta(\bar{s})}Q[e]<1,$$

则可找到网络 $\tilde{G}$ 中的一个梳子"$\tilde{S},\tilde{F}$"，使得

$$\sum_{e\in E(\tilde{s})}\tilde{x}(e)+\sum_{e\in\tilde{F}}\tilde{x}(e)>|\tilde{S}|+\frac{|\tilde{F}|-1}{2},$$

因此，可增加割平面条件

$$\sum_{e\in E(\tilde{s})}\tilde{x}(e)+\sum_{e\in\tilde{F}}\tilde{x}(e)\leqslant|\tilde{S}|+\frac{|\tilde{F}|-1}{2}.$$

改进松弛问题($\tilde{C}P$)，继续用字典序单纯形算法求($\tilde{C}P$)的最优解。然后，转到步骤 5。

步骤 12　设 $\tilde{x}_0=\sum\limits_{e\in E}c(e)\tilde{x}(e)$，则置

$$\tilde{x}\to x^*,\ \tilde{x}_0\to x_0^*,然后，转到步骤 2。$$

步骤 13　选取一个边 e，使得 $0<\bar{x}(e)<1$（容易证明，这样的 e 必定存在），按条件“$x(e)=0$”和“$x(e)=1$”，将(CP)分解为两个子问题(CP_1)和(CP_2)，赋予它们的目标函数下界估计值为 $\bar{x}_0$，将(CP_1)和(CP_2)记入 π 中，然后，转到步骤 3。

6.3 集合分解与覆盖问题

6.3.1 基本概念

设 $I=\{1,2,\cdots,m\}$ 是一有限个元素的集合。设 $F=\{F_1,F_2,\cdots,F_n\}$ 是 I 上的一子集簇。即 F_j 都是 I 的子集。记 $J=\{1,2,\cdots,n\}$。J 的一个子集 J^*，若满足

$$\bigcup_{j\in J^*} F_j=I,$$

则称 J^* 是 I 的一个覆盖；若满足

$$F_j\cap F_k=\phi,\ \text{对所有的}\ j,k\in J^*,\ j\neq k,$$

则称 J^* 是 F 的一个无关子集簇；若满足

$$\bigcup_{j\in J^*} F_j=I,\ F_j\cap F_k=\phi,\ j\neq k,j,k\in J^*,$$

则称 J^* 是 I 的一个分解。

对应于一个子集簇 F，定义 0,1 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 如下

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若元素}\ i\in F_j,\\ 0, & \text{若元素}\ i\notin F_j.\end{cases}$$

称 $\boldsymbol{A}$ 为子集簇 F 的关联矩阵。

设 C_j 是子集 F_j 的价格（或称权）。对 J 的任意子集 J^*，定义 J^* 的价格为

$$\sum_{j\in J^*} C_j.$$

下面三个问题是基本的整数规划问题。

覆盖问题(COP)：

$$\min x_0=\sum_{j=1}^{n} C_j x_j,$$

满足

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\geqslant 1,\ i=1,\cdots,m$$
$$x_j\ \text{取 0 或 1},\ j=1,\cdots,n.$$

写成矩阵形式为

$$\min\{\boldsymbol{CX}\mid \boldsymbol{Ax}\geqslant \boldsymbol{1},\ \boldsymbol{x}\ \text{为 0,1 向量}\},$$

其中

$$\boldsymbol{C}=(C_1,\cdots,C_n)>0,$$
$$\boldsymbol{1}=(1,\cdots,1)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}},$$

$$x_j = \begin{cases} 1, & j \in J^* \\ 0, & j \notin J^*. \end{cases}$$

分解问题(DPP):

$$\min\{CX \mid Ax = \mathbf{1}, x \text{ 为 } 0,1 \text{ 向量}\},$$

无关子簇问题(IPP):

$$\min\{CX \mid Ax \leqslant \mathbf{1}, x \text{ 为 } 0,1 \text{ 向量}\},$$

已经看到,图和网络中的很多极值问题,都可归结成上述0,1规划问题。也有很多实际问题可以归结成上述形式的规划问题。

例如,让 $I=\{1,2,\cdots,m\}$ 表示某天运输任务的集合,$F_j \subset I$ 表示任务的某种搭配方式,它组合成一个合宜的循环运输路线,适合于一辆汽车去完成,而 F 表示所有合宜的搭配方式的集合,设 C_j 是循环运输路线 F_j 上空驶的总里程。则此运输任务的分配问题,就可归结为集合分解问题。

又例如,设 I 是材料的集合,J 是商品的种类,F_j 表示制作商品 j 时所必需的材料子集合(假设一种材料只能用在一种商品上,不能分开使用)。C_j 表示商品 j 的价格,则此生产计划问题可以归结为无关子集簇问题。

定理 6.8 设 $A=(a_{ij})$ 是 m 行 n 列的0,1矩阵,若有两个 n 维的0,1向量 $\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2$,使得

$$\boldsymbol{x}^1+\boldsymbol{x}^2=\mathbf{1},\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^i=\mathbf{1},\ i=1,2,$$

则 $\boldsymbol{A}$ 是全单位模矩阵,其中**1**是分量为1的向量。

证明:因为 x_j^1 和 x_j^2 取0或1,且

$$x_j^1+x_j^2=1,\ j=1,\cdots,n,$$

则可将 $\boldsymbol{A}$ 的列指标分解成两部分:S_1 和 S_2

$$S_1=\{j \mid x_j^1=1\},\ S_2=\{j \mid x_j^2=1\},$$

因为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^i=\mathbf{1},\ i=1,2,$$

所以

$$\boldsymbol{A}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^1+\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^2\right)=\mathbf{1},$$

即

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}^1+\boldsymbol{x}^2)=\boldsymbol{A}\ \mathbf{1}=2\mathbf{1}.$$

因此,有关系式

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=2,\ i=1,\cdots,m.$$

故 $\boldsymbol{A}$ 中每一行有且仅有两个1,一个属于 S_1 的列中,另一个1处于 S_2 中的列。因此 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 可以看做某二部图 G 的点边关联矩阵,故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是全单位模矩阵,因而 $\boldsymbol{A}$ 也是全单位模矩阵。证毕。

定理 6.9 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 m 行 n 列的0,1矩阵,若有两个 n 维的0,1向量 $x^{1,2}$,使得

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^i=\mathbf{1},\ i=1,2, \\ &x_j^1=x_j^2,\ 1\leqslant j\leqslant k<n, \\ &x_j^1+x_j^2=1,\ k+1\leqslant j\leqslant n, \end{aligned}$$

则多面体

$$P=\{x\mid Ax=1,\ x_j=x_j^1,\ (1\leqslant j\leqslant k);\ 0\leqslant x\leqslant 1\}$$

的所有顶点,都是 0,1 解。

证明:设 $A=(P_1,\cdots,P_k,P_{k+1},\cdots,P_n)$。设

$$\sum_{j=1}^{k}x_j^1P_j=\delta$$

设在 $Ax=1$中,去掉使 δ 的分量为 1 的行,以及前面的 k 列后,变为 $\bar{A}\bar{x}=\bar{1}$,其中的 $\bar{x}=(x_{k+1},\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$。由于

$$\bar{x}^1=(x_{k+1}^1,\cdots,x_n^1)^{\mathrm{T}}\text{ 和 }\bar{x}^2=(x_{k+1}^2,\cdots,x_n^2)^{\mathrm{T}}$$

都是条件 $\bar{A}\bar{x}=1$的0,1解,且满足 $\bar{x}^1+\bar{x}^2=\bar{1}$,根据定理 6.8,可知 $\bar{A}$ 是全单位模的,因此,多面体 P 的所有顶点都是 0,1 解。证毕。

考虑集合分解问题

$$\min\{Cx\mid Ax=1,\ x\text{ 为 }0,1\text{ 向量}\},$$

设 x^1 是它的任何一个允许解,x^*是它惟一的最优解。记

$$\bar{P}=\{x\mid Ax=1,\ x\geqslant 0\}.$$

定理 6.10 存在多面体 $\bar{P}$ 的顶点序列

$$x^1,x^2,\cdots,\ x^k=x^*,$$

使得

(1) 所有的 x^i 都是 0,1 向量,

(2) x^i 与x^{i+1}在 $\bar{P}$ 上相邻(即 x^i 与x^{i+1}之间只有一个变量不同),

(3) $Cx^i\geqslant Cx^{i+1},\ i=1,\cdots,k-1$.

证明:若 $x_j^1+x_j^*=1, j=1,2,\cdots,n$,则由定理 6.8,可知 A 是全单位模矩阵,$\bar{P}$ 的所有顶点都是 0,1 向量。应用单纯形方法到线性规划问题:

$$\min\{Cx\mid x\in\bar{P}\}.$$

假如以 x^1 为初始的顶点,那么,当终止于最优解 x^*时,根据单纯形程序的计算过程,便可得到满足(1),(2),(3)的顶点序列。

现在,不妨假设

$$x_j^1=x_j^*,\ j=1,\cdots,k,$$
$$x_j^1+x_j^*=1,\ j=k+1,\cdots,n.$$

根据定理 6.9,只要对子问题:

$$\min Cx,$$

满足

$$Ax=1,$$
$$x_j=x_j^1,\ j=1,\cdots,k,$$
$$x_j\geqslant 0,\ j=k+1,\cdots,n,$$

应用单纯形方法,同样也可得到一个满足(1),(2),(3)的顶点序列。证毕。

对给定的 m 行 n 列的 0,1 矩阵 $A=(P_1,\cdots,P_n)$定义 A 的交图$G[A]=[V,E]$如下:

$$V=\{1,2,\cdots,n\},$$

$$E=\left\{[i,j]\mid P_i^TP_j=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}a_{kj}\geqslant 1\right\}.$$

让 $\bar{A}^T$ 表示交图 $G[A]$ 的点边关联矩阵(即 $\bar{A}$ 的列对应于 $G[A]$ 的点, $\bar{A}$ 的行对应于 $G[A]$ 的边)。记

$$P=\{x \mid Ax\leqslant 1,\ x \text{ 是 } 0,1 \text{ 向量}\},$$
$$\bar{P}=\{x \mid \bar{A}x\leqslant 1,\ x \text{ 是 } 0,1 \text{ 向量}\},$$

则容易证明, $P=\bar{P}$.

交图 $G[A]$ 中的一个团 K,若对任意的 $v\in(V\setminus K)$,都使 $v\cup K$ 不是 $G[A]$ 的团,则称 K 是 $G[A]$ 的一个极大团。

定理 6.11 不等式条件 H:

$$\sum_{j\in K} x_j\leqslant 1,\ \text{对某一给定的 } K\subseteq V$$

是 $(P)^{\Delta}$ 的一个边界面的充要条件为: K 是 $G[A]$ 的一个极大团。

证明:设 K 是 $G[A]$ 的一个极大团。显然条件 H 是 $(P)^{\Delta}$ 的一个分离,即

$$x\in(P)^{\Delta}\Rightarrow \sum_{j\in K} x_j\leqslant 1.$$

因为 K 是极大团,所以对任意的 $g\notin K$,必有某个 $i_g\in K$,使得 $[i_g,g]\in E$,(即 $P_g^T p_{i_g}=0$)

记

$$e^i \text{ 为第 } i \text{ 个 } n \text{ 维的单位向量},$$
$$x^i=e^i,\ \text{对所有的 } i\in K,$$
$$x^g=e^g+e^{i_g},\ \text{对所有的 } g\notin K.$$

则容易看出

$$\sum_{j\in K} x_j^h=1,\ h=1,\cdots,n,$$
$$x^h\in P\subseteq(P)^{\Delta},\ h=1,\cdots,n,$$
$$\{x^1,\cdots,x^n\} \text{ 构成一线性无关的向量组},$$

因此,条件 H 是 $(P)^{\Delta}$ 的一个边界面。

设 H 是 $(P)^{\Delta}$ 的一个边界面,则显然 K 必是 $G[A]$ 的一个团。现在假设 K 不是 $G[A]$ 的极大团。则必存在某 $i\notin K$,使得 $K\cup\{i\}$ 是 $G[A]$ 的团。因此有关系:

$$x\in(P)^{\Delta}\Rightarrow \sum_{j\in K\cup\{i\}} x_j\leqslant 1.$$

因为条件 H 是 $(P)^{\Delta}$ 的一个边界面,所以必存在线性无关的向量组 $\{x^1,x^2,\cdots,x^n\}$,使得

$$x^k\in(P)^{\Delta},\ k=1,2,\cdots,n,$$
$$\sum_{j\in K} x_j^k=1,\ k=1,2,\cdots,n,$$
$$\sum_{j\in\{K\cup\{i\}\}} x_j\leqslant 1,\ k=1,2,\cdots,n,$$

由此可知

$$x_j^k=0,\ k=1,2,\cdots,n,$$

则 $\{x^1,x^2,\cdots,x^n\}$, 实际上是 $n-1$ 维空间中的 n 个向量,故必线性相关,矛盾。证毕。

无关子集簇问题,增加松弛变量后,就可化为分解问题。而分解问题(DPP),当 $C>0$ 时,可等价地化成如下的覆盖问题:

$$\min \sum_{j=1}^{n}(C_j+Lt_j)x_j,$$

满足

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant 1,\ i=1,2,\cdots,m,$$

所有的 x_j 取 0 或 1，其中

$$t_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij},\ L = \sum_{j=1}^{n} C_j + 1.$$

事实上，设 x^* 是分解问题的任一允许解，$\hat{x}$ 是覆盖问题的，但不是分解问题的允许解。即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{1},\ \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}} \geqslant \boldsymbol{1},$$

$$\hat{I} = \left\{ i \mid \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j > 1,\ 1 \leqslant i \leqslant m \right\} \neq \phi.$$

则显然有关系

$$\sum_{j=1}^{n} (C_j + Lt_j)x_j^* = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j^* + Lm < L(m+1).$$

但是

$$\sum_{j=1}^{n} (C_j + Lt_j)\hat{x} \geqslant \sum_{j=1}^{n} C_j \hat{x}_j + L(m + |\hat{I}|) \geqslant L(m+1).$$

因此，只要分解问题有允许解，上述覆盖问题的最优解必在分解问题的允许解中达到。

6.3.2 覆盖问题的割平面算法

对覆盖问题(COP)，当 $\boldsymbol{C}>0$ 时，常常可能根据下述的简单规则，将问题化简。

化简规则1 若 $\boldsymbol{A}$ 的某一行 $\boldsymbol{a}_i$ 是一个单位向量，例如 $a_{ik}=1, a_{ij}=0$，(对所有的 $j \neq k$)则 x_k 必须取 1。由于 $x_k=1$，在 $\boldsymbol{A}$ 的第 k 列中，凡是元素为 1 的行，条件都已得到满足，因此，可将这些行和第 k 列去掉。

化简规则2 若 $\boldsymbol{A}$ 中的行 $\boldsymbol{a}_t$ 和 $\boldsymbol{a}_p$，使得 $\boldsymbol{a}_t \geqslant \boldsymbol{a}_p$，则第 t 个条件可以去掉，因为它是第 p 个条件的推论。

化简规则3 若有 $\boldsymbol{A}$ 的某列指标集 S，以及某一个列指标 $k \notin s$，使得

$$\sum_{j \in s} a_{ij} \geqslant a_{ik},\ i=1,\cdots,m,$$

且

$$\sum_{j \in s} C_j \leqslant C_k,$$

则显然第 k 列可以去掉，即 x_k 在最优解中可取为零。

这些规划虽然简单，但是，实践证明，在计算时很起作用。

对 $\boldsymbol{A}$ 的任一指标子集合 J，定义向量 $\boldsymbol{x}(J)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 如下：

$$x_j = \begin{cases} 1, & j \in J \\ 0, & j \notin J \end{cases}$$

假如 J 的关联向量 $\boldsymbol{x}(J)$ 是覆盖问题的允许解，则称 J 为一个覆盖。假如在覆盖 J 中，有一个指标 j，使得 $J \setminus \{j\}$ 仍是一个覆盖，即

$$\sum_{k \in J} a_{ik} - a_{ij} \geqslant 1,\ i=1,\cdots,m,$$

则称 j 是一过剩指标，一个不含过剩指标的覆盖，称为基本覆盖，否则称为过剩覆盖。覆盖 J

中的一个指标k，它不是J的过剩指标的充要条件为：

$$I(k)=\left\{i \,\middle|\, \sum_{j\in J}a_{ij}-a_{ik}=0\right\}\neq\phi.$$

因为$C>0$，故覆盖问题的最优解必对应于一个基本覆盖。

定义线性规划问题$(\tilde{P})$为：

$$\min\{Cx \mid Ax\geqslant 1,\ x\geqslant 0\}.$$

因为A是0,1矩阵，$C>0$，故$(\tilde{P})$的最优解必满足条件

$$0\leqslant x_j\leqslant 1,\ j=1,\cdots,n.$$

设$(\tilde{P})$的基本最优解为$\tilde{x}^*$。对应于$\tilde{x}^*$，定义向量$\bar{x}^*$如下：

$$\bar{x}_j^*=\lceil \tilde{x}_j^*\rceil,\ j=1,\cdots,n,$$

显然，$\bar{x}^*$是覆盖问题(COP)的一个允许解。记

$$\bar{J}^*=\{j \mid \bar{x}_j^*=1,\ 1\leqslant j\leqslant n\},$$

则$\bar{J}^*$是一个覆盖，但不一定是基本覆盖。从$\bar{J}^*$中逐个地减去过剩指标后，可得一个基本覆盖，记作J^*。

定理 6.12 若J是一个基本覆盖，则$x(J)$是$(\tilde{P})$的一个基本允许解。

证明：因为J是一个基本覆盖，所以J中无过程指标，即对从任意的$k\in J$，必存在某一行i，使得$a_{ik}=1$，$a_{ij}=0$，对所有的$j\in J\setminus\{k\}$。因此，将行适当排列后，由J的列构成的A中子矩阵，必可表示成如下的形式：

J中的列

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & A_J & \end{pmatrix}.$$

上述子矩阵必可扩充成一个基矩阵，因此$x(J)$是$(\tilde{P})$的一个基本允许解。证毕.

将线性规划$(\tilde{P})$化成标准形式：

求： $\min\ Cx,$

满足 $Ax-Iy=1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0.$

这里的I表示$m\times m$的单位矩阵。

不妨可设$J=\{1,2,\cdots,k\}$是一个基本覆盖。将行进行适当排列后，矩阵A和向量C可表示成如下的形式：

$$C=(C_J C_N),$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & A_{12} \\ & & 1 & \\ & A_{21} & & A_{22}\end{bmatrix},$$

（J的列；非J的列）

因此，对应于$x(J)$的基矩阵可取成如下的半三角形式：

$$
B(J)=\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & \mathbf{0} & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & A_{21} & & & & -1 \end{bmatrix}.
$$

$\underbrace{\qquad}_{J\text{的列}}$　　$\underbrace{\qquad}_{-J\text{中的列}}$

定理 6.13　对应于任何基本覆盖 J 的基矩阵 $B(J)$，必满足 $B(J)^{-1}=B(J)$。

证明：不妨可设

$$
B(J)=\begin{pmatrix} I_1 & \mathbf{0} \\ A_{21} & -I_2 \end{pmatrix},
$$

其中 I_1 和 I_2 都表示单位矩阵，则容易看出

$$
B(J)B(J)=\begin{pmatrix} I_1 & \mathbf{0} \\ A_{21}I_1-I_2A_{21} & I_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_2 \end{pmatrix},
$$

证毕。

对给定的基本覆盖 J，为了书写简单起见，我们记

$$
\begin{aligned}
&B^{-1}=B(J)^{-1}=B(J),\\
&C_B=(C_J,\mathbf{0}),\\
&\bar{A}=(A-I),\\
&\bar{C}=(C_J,C_N,\mathbf{0}),\\
&N=\{1,\cdots,n\}\setminus J
\end{aligned}
$$

根据单纯形算法，对线性规划($\tilde{P}$)而言，允许基 $B(J)$ 是最优的条件为

$$
C_BB^{-1}\bar{A}\leqslant\bar{C}.
$$

设

$$
\bar{A}=\begin{bmatrix} I_1 & A_{12} & -I_1 & \mathbf{0} \\ A_{21} & A_{22} & \mathbf{0} & -I_2 \end{bmatrix},
$$

让 $P_j(j\in N)$ 表示 A_{12} 中的列向量，则最优判别条件可等价地写为：

$$
C_JP_j-C_j\leqslant 0,\ \text{对所有的}\ j\in N.
$$

假设 $B(J)$ 不是($\tilde{P}$)的最优基，记：

$$
Q=\{j\mid C_JP_j-C_j>0,\ j\in N\},
$$

这时，若有另一个基本覆盖 J^*，使得

$$
Cx(J^*)<Cx(J),
$$

则 $x(J^*)=(x_1^*,\cdots,J_n^*)^{\mathrm{T}}$ 必须满足

$$
\sum_{j\in Q}x_j^*\geqslant 1.
$$

现在，称条件

$$
\sum_{j\in Q}x_j\geqslant 1,
$$

为关于基本覆盖 J 的割平面。

覆盖问题的割平面算法的计算程序：

步骤 1　若 A 中有一行全为零，则步骤终止，问题无允许解。相反，任给一个覆盖，以它作为初始的记录 J，置 $x_0^* = Cx(J)$。

步骤 2　利用化简规则 1，2，3，尽可能地化简问题(COP)和约束条件的矩阵 A。假如经过化简后，已经能完全确定问题(COP)的最优解，则步骤终止。否则进行步骤 3。

步骤 3　求松弛线性规划问题($\tilde{P}$)的基本最优解 $\tilde{x}^*$，并通过 $\tilde{x}^*$，求得一个基本覆盖 J^*。

步骤 4　若 $Cx(J^*) < x_0^*$，则改进记录解，将 $J^* \to J$，$Cx(J^*) \to x_0^*$，然后进行步骤 5；若 $Cx(J^*) \geqslant x_0^*$，则进行步骤 5。

步骤 5　对应于基本覆盖 J^*，经过适当地交换行和列的次序后，将矩阵 A 和向量 C 排列成如下的形式

$$C = (C_{J^*}\ C_{N^*}),$$

$$A = \begin{pmatrix} I_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

同时，取基矩阵为

$$B(J^*) = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ A_{21} & -I_2 \end{pmatrix},$$

然后进行步骤 6。

步骤 6　若对所有的 $j \in N^*$，满足

$$C_{J^*} P_j - C_j \leqslant 0, \quad P_j \text{ 为 } A_{12} \text{中的列向量},$$

则步骤终止，当时的记录解 $x(J)$便是(COP)的最优解。相反，置

$$Q = \{ j \mid C_{J^*} P_j - C_j > 0,\ j \in N^* \},$$

然后，进行步骤 7。

步骤 7　增加割平面

$$\sum_{j \in Q} x_j \geqslant 1,$$

用覆盖问题

$$\min \left\{ Cx \mid Ax \geqslant 1,\ \sum_{j \in Q} x_j \geqslant 1,\ x \text{ 为 } 0,1 \text{ 向量} \right\}$$

代替原来的问题(COP)，转到步骤 2。

因为每增加一个割平面后，至少割去了原问题的一个覆盖。所以程序必在有限步内终止。

习　题

设 $A = (a_{ij})$是一个 $m \times n$ 的 0，1 矩阵，a_j 表示 A 的第 j 列，A 中没有全为零的行或列。e 表示 m 维的分量全为 1 的列向量。记

$$N = \{1, \cdots, n\},$$
$$M = \{1, \cdots, m\},$$
$$P = \{x \in R^n \mid Ax = e,\ x_j = 0 \text{ 或 } 1,\ j \in N\},$$
$$\tilde{P} = \{x \in R^n \mid Ax = e,\ x \geqslant 0\},$$
$$\bar{P} = \{x \in R^n \mid Ax \leqslant e,\ x_j = 0 \text{ 或 } 1,\ j \in N\},$$
$$M_k = \{i \in M \mid a_{ik} = 1\},\ k \in N,$$

$$\overline{M}_k = M \setminus M_k,$$
$$N_i = \{k \in N \mid a_{ik} = 1\},\ i \in M,$$
$$\overline{N}_i = N \setminus N_i,$$
$$N_{ik} = \{j \in N_i \mid a_j^{\mathrm{T}} a_k = 0\},\ i \in \overline{M}_k,\ k \in M.$$

1．证明：对任意的 $x \in P$，必有

$$\sum_{j \in N_{ik}} x_j \leqslant \sum_{j \in N_i} x_j \leqslant 1.$$

2．证明：对任意的 $x \in P$ 以及任意的 $k \in N$，$i \in \overline{M}_k$，必有

$$x_k \leqslant \sum_{j \in N_{ik}} x_j.$$

3．证明：对任意的 $x \in \overline{P}$，$x \neq 0$，若满足：

$$x_k \leqslant \sum_{j \in N_{ik}} x_j,\ \text{对任意的}\ k \in N,\ i \in \overline{M}_k,$$

则 $x \in P$.

4．已知代价矩阵 C，解下面任务安排问题。

$$C = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ \\ \end{array}\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} J_1 & J_2 & J_3 \end{matrix}\end{array}$$

5．讨论下面问题的解法

$$\min z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij}$$
$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = 1, 2, \cdots, m;$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = 1, 2, \cdots, n;$$
$$x_{ij} \geqslant 0,\ i = 1, 2, \cdots, m,\ j = 1, 2, \cdots, n.$$

6．已知代价矩阵

$$D = \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \\ \\ \end{array}\begin{array}{c}\begin{bmatrix} 13 & 42 & 18 & 16 & 19 & 14 \\ 15 & 21 & 18 & 16 & 54 & 16 \\ 23 & 24 & 26 & 41 & 28 & 29 \\ 19 & 51 & 21 & 20 & 28 & 26 \\ 8 & 9 & 21 & 11 & 11 & 31 \\ 24 & 26 & 26 & 31 & 26 & 44 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} J_1 & J_2 & J_3 & J_4 & J_5 & J_6 \end{matrix}\end{array}$$

求最佳任务安排方案。

7　多目标规划

大多数实际生产或决策过程需要考虑多个目标。因此多目标规划(不管变量是离散的还是连续的)具有普遍性,单目标规划是经过合理简化或序列化之后形成的。幸运的是,多目标规划方法与单目标规划方法相比并不存在更多的困难(见参考文献[4])。事实上,只要增加一些概念和选项,同一个单目标规划方法往往能解决多目标规划问题。

多目标规划中的多个待优化目标,通常是互相冲突的,但也有些互不冲突的多目标。本章主要处理互相冲突的多目标,但从互不冲突的多目标说起。

7.1　互不冲突的多目标规划

互不冲突的多目标规划可以毫无困难地分解成几个单目标规划问题。这里的关键是要根据实际情况排列单目标规划的优先级顺序,并且有可能对不同的单目标规划应采用各自的方法。

7.1.1　考虑库存余材的杆材下料方案

一个长期从事电汇排(Busway)设计、生产、安装的车间,每完成一座建筑物电汇排(视为一维杆件)的安装,就要用一批标准长度为 l 的原杆材截成长度和数量分别为 $l_1, b_1; l_2, b_2; \cdots; l_m, b_m$ 的坯料(简称下料任务),并且剩下许多长度小于 l 的余材库存起来。在每个“设计—生产—安装”周期内,总是期望:①充分利用库存余材下料;②标准长度 l 的新购杆材根数用得最少。

这两个目标可以作为独立的规划问题提出,也可以作为同一个实际问题的两个紧密相关的方面来研究。譬如,第二个问题就是一个经典的整数规划问题:杆材下料(见 5.3 节)。

对于新购的一批标准杆材,人们首先考虑的自然是用最少的根数达到目标。在不考虑余材的情况下,这也是惟一关心的问题。

然而,如果长期从事这类下料工作,下料完毕后剩下各种长短、数量不定的余材是必然的。这些余材大多数可作下一次下料时使用。倘若堆置不用,不仅是一种浪费,而且给库存增加负担。因此,对于长期从事这类下料工作的人员,每次接受一项下料任务,首先考虑的是尽可能充分利用库存余材,即上述第一个规划问题,然后才考虑购进最少根数的标准杆材下完库存余材不可能截出的坯料,即经典的杆材下料问题。

显然,库存余材的长短和数量都是不确定的。达到标准长度 l 的余材可假定为没有,而任何下料任务都用不上的极短余材也已经从库存中清除出去。假定库存物料管理软件能及时向下料工程师提供可利用余材的总数 n,每根余材的长度为 $e_j(j=1,2,\cdots n: e_1 \leqslant e_2 \leqslant \cdots \leqslant e_n)$。

以余材 e_j 为代表,则下料任务$(l_1, b_1; l_2, b_2; \cdots; l_m, b_m)$中凡 $l_i \geqslant e_j$ 的坯料不可能从这类余材截出。在考虑 e_j 余材利用时很容易把 $l_i > e_j$ 的坯料任务从任务清单中删除。假定这种删除已经完成,则余材 e_j 的利用问题提法如下:

已知长度 e_j 的余材有 1 根，问在下料任务$(l_1,b_1;l_2,b_2;\cdots;l_k,b_k)$中最多能完成哪些任务？其中

$$l_1<l_2<\cdots<l_k\leqslant e_j \tag{7.1.1}$$

这样，把库存余材的充分利用分解成 n 类，由长度最小的余材 e_1 开始，求解 n 个问题(7.1.1)，如果每根余材都充分利用了，就认为库存余材在完成当前下料任务时被充分利用了。

在问题(7.1.1)中，令

$$p=\sum_{i=1}^{k}b_i$$

表示下料任务$(l_1,b_1;l_2,b_2;\cdots;l_k,b_k)$的坯料总数，并用 t_i 表示第 i 根坯料的长度。显然，

$$t_i=l_s\quad \forall\, i:1\leqslant i\leqslant p\quad \exists\, s:1\leqslant s\leqslant k$$

可以按任何次序排列这 p 根坯料。设 $l_1,l_2,\cdots,l_k$ 按长度递增排列：$l_1<l_2<\cdots<l_k$。采用的坯料排列 π_1 是(长度)分段递减排列，例如 $b_s\geqslant 2(s=1,2,\cdots,k)$，则有

$$\pi_1:t_1=l_k,t_2=l_{k-1},t_k=l_1;t_{k+1}=l_k,\cdots,t_{2k}=l_1,\cdots$$

在排列 π_1 下，余材利用问题(7.1.1)可表述为：长度为 e_j 的余材，最多能完成下料任务$(t_1,t_2,\cdots,t_p)$中的哪些任务？其中 $e_j\geqslant t_i>\cdots$

设变量

$$x_1=\begin{cases}1,\text{坯料 } t_i \text{ 被余材} e_j \text{ 切出},\\0,\text{坯料 } t_i \text{ 不被余材} e_j \text{ 切出}\end{cases}$$

则余材利用问题可写成如下特殊形式的 0-1 背包问题：

$$\begin{aligned}\max\ wx&=\sum_{i=1}^{p}t_ix_i\\ \text{s.t.}\ wx&=\sum_{i=1}^{p}t_ix_i\leqslant e_j,x_i\in\{0,1\}\end{aligned}\tag{7.1.2}$$

从长度最小的余材 e_1 开始，求解 n 个背包问题(7.1.2)，就解决了库存余材的充分利用问题。

用不完全枚举法近似求解背包问题(7.1.2)是最简单的，它的基本步骤类似于 5.2 节(第 5 章习题 1)。

近似算法求解背包问题(7.1.2)的误差取决于下料任务各坯料的排列 π。如果 π 中将同长度 l_i 坯料顺序排列，而 b_i 又较大，那么误差可能较大。为了减小近似求解的误差，取分段递减排列 π_1。

近似算法求解(7.1.2)的运算次数是 θ 的某个倍数，通常 $\theta=12$，因此近似求解(7.1.2)的运算操作次数为常数。解 n 个背包问题(7.1.2)的复杂性是 $O(n)$。

库存余材利用问题(7.1.1)的解答可能因 e_j 次序而不惟一。基于多目标考虑，从长度最小的余材开始，逐次求解背包问题(7.1.2)。

有趣的是，按本节提出的方案，先求解 n 根库存余材利用问题(7.1.1)，最后求解杆材下料问题，不但不增加计算复杂性，而且还减低计算复杂性。这是因为通过 n 个背包问题(7.1.2)的求解，就把一个坯料数为 $\sum_{i=1}^{m}b_i$ 的杆材下料问题，变成一个坯料数目较少的杆材下料问

题。

7.1.2 一维切材问题的完整数学模型

5.3 节提出的标准一维切材问题主要考虑"用最少的杆材完成坯料任务"这个命题。其实,从余材库存备用角度考虑,更周密些的命题或许是"用最少杆材完成坯料任务,还留出最长的余材准备下次切材时好用。"这个命题包含顺序不能颠倒的两个优化目标,其前提是第一目标问题的解在多数情况下不惟一。5.3 节设计的不完全枚举算法在统计近似意义下解决了这个二目标规划问题。

记$(l_j,\ b_j;j=1,2,\cdots,m)$为坯料任务,$l$ 为杆材长度, $k_0=\lceil y\rceil\left[y=\sum_{j=1}^{m}\frac{b_jl_j}{l}\right]$为临界耗材量。由定理 5.2 和定理 5.4 知道 $k_0\leqslant k\leqslant 2k_0$,其中 k 为完成坯料任务所用杆材数。设第 i 根杆材切取坯料 l_j 的数目为 a_{ij},则有

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{m}l_ja_{ij}\leqslant l,\ \sum_{j=1}^{m}a_{ij}>0,\ i=1,2,\cdots,k\\&\sum_{i=1}^{k}a_{ij}=b_j,\ j=1,2,\cdots,m\\&\text{整数 } a_{ij}\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,k,\ j=1,2,\cdots,m\end{aligned}\tag{7.1.3}$$

一维切材问题的第一目标是求

$$k^*=\min k$$

使线性整数不等式组(7.1.3)有解,而

$$k=k^*-1$$

使(7.1.3)无解。k^* 叫做(7.1.3)的判定数,也就是完成坯料任务的最少耗材量。

判定数 $k^*\in[k_0,2k_0]$。令 $k=k_1=\lceil 1.5k_0\rceil$,解(7.1.3)。如果有解,则 $k^*\in[k_0,k_1]$,令 $k=k_2=\lceil 0.5(k_0+k_1)\rceil$;否则 $k^*\in(k_1,2k_0]$,令 $k=k_2=\lceil 0.5(k_1+2k_0)\rceil$;重新求解(7.1.3)。这样,用二分法可以得到 k^*。它大约需要求解不等式组(7.1.3)$\lceil u\rceil(u=\ln k_0/\ln 2)$次。判定数是惟一的。

k^*求得后,(7.1.3)的解通常不止一个,因此更多的需求(或目标)可以对切材问题提出。例如,可以要求切出最小的切材余量,因而期望在完成坯料任务后留下最大的切材余量。

$$\begin{aligned}\max z&=\max_{1\leqslant i\leqslant k^*}\sum_{j=1}^{m}l_ja_{ij}\\\text{s.t.}\quad&\sum_{j=1}^{m}l_ja_{ij}\leqslant l,\ \sum_{j=1}^{m}a_{ij}>0,\ i=1,2,\cdots,k^*\\&\sum_{i=1}^{k^*}a_{ij}=b_j,\ j=1,2,\cdots,m\\&\text{整数 } a_{ij}\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,k^*,\ j=1,2,\cdots,m\end{aligned}\tag{7.1.4}$$

一维切材问题的完整数学模型由两个目标规划组成,第一目标是求不等式组(7.1.3)的判定数,第二目标是求解线性整数规划(7.1.4)。在完整数学模型下,多数切材问题有惟一解。

有许多精确方法求(7.1.3)的判定数及解线性整数规划问题(7.1.4)。然而到目前为止,所有精确方法的计算复杂性均不低于 $O(k_0^4m^4L^2)$;而用不完全枚举算法近似求解完整的一

维切材问题,计算代价只是 $O(n^2L)$;其中 $n = \sum_{j=1}^{m} b_j$, L 为数的二进制长度。

7.2 偏差和优先级

处理互相冲突的多目标规划问题的方法不是惟一的,并且互有争议。本章叙述的方法比较普遍地被接受。为了掌握这些方法,需要使用"偏差"和"优先级"两个术语,并且不强调变量的离散性。

先引进偏差的概念。

例如求 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 使 $\boldsymbol{Ax} = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = \boldsymbol{b}$,可引进偏差 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{n}$,将问题转化为求

$$\begin{aligned} &\min z = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{n} \\ &\text{s.t.} \quad \boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{p} + \boldsymbol{n} = \boldsymbol{b} \\ &\qquad\quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{n} \geqslant \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 分别称为正、负偏差量。若 $\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b} > 0$,则 $\boldsymbol{p} > \boldsymbol{0}, \boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$;若 $\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b} < \boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{n} > \boldsymbol{0}, \boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$,显然 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 不可能同时为正,其中 $\boldsymbol{A} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$。当然,若要求 $\boldsymbol{x}$ 使满足 $\boldsymbol{Ax} \geqslant \boldsymbol{b}$,可转化为求

$$\begin{aligned} &\min z = \boldsymbol{n} \\ &\text{s.t.} \quad \boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{p} + \boldsymbol{n} = \boldsymbol{b} \\ &\qquad\quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{n} \geqslant \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

与此类似求 $\boldsymbol{x}$ 使满足 $\boldsymbol{Ax} \leqslant \boldsymbol{b}$,则有

$$\begin{aligned} &\min z = \boldsymbol{p} \\ &\text{s.t.} \quad \boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{p} + \boldsymbol{n} = \boldsymbol{b} \\ &\qquad\quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{n} \geqslant \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

道理很直观,对于目标 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$,则要求 $\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}$ 的绝对值极小,对于目标 $\boldsymbol{Ax} \geqslant \boldsymbol{b}$,则要求负偏差量 $\boldsymbol{n}$ 极小,对于目标 $\boldsymbol{Ax} \leqslant \boldsymbol{b}$,则要求正偏差量 $\boldsymbol{p}$ 达到极小。

再引进目标函数优先级概念。这一点不同于单目标规划。举例如下。

【例 7.1】 有一公司生产良种产品 P_1 和 P_2,它们单位产品的利润分别为 80 元和 100 元。P_1 和 P_2 都需要 A, B, C 三种资源

资源 / 产品	A	B	C
P_1	4	4	1
P_2	5	2	0

该公司每天拥有 A, B, C 的有效资源分别为 80,48,6 单位。问题是如何安排生产,使利润达到最大?

设:x_1 为每天生产 P_1 产品数,x_2 为每天生产 P_2 产品数,问题导至

$$\begin{aligned} &\max z = 80x_1 + 100x_2 \\ &\text{s.t.} \quad 4x_1 + 5x_2 \leqslant 80 \end{aligned}$$

$$4x_1+2x_2\leqslant 48$$
$$x_1\leqslant 6$$
$$x_1,x_2\geqslant 0$$

如若公司经理必须考虑目标的优先级顺序为：

1. 首先要保证 A,B 两种资源不能超过限度：

$$4x_1+5x_2\leqslant 80$$
$$4x_1+2x_2\leqslant 48$$

2. 每天收入至少 800 元：

$$80x_1+100x_2\geqslant 80$$

3. 资源 C 不超过 6：

$$x_1\leqslant 6$$

4. 产品 P_1 和 P_2 产量总和(单位数)不超过 7 单位：$x_1+x_2\leqslant 7$

用下列形式表达之

$$\min\ z=P_1(p_1+p_2)+p_2n_3+P_3p_4+P_4p_5$$
$$\text{s.t.}\quad 4x_1+5x_2+n_1-p_1=80$$
$$4x_1+2x_2+n_2-p_2=48$$
$$80x_1+100x_2+n_3-p_3=800$$
$$x_1+n_4-p_4=6$$
$$x_1+x_2+n_5-p_5=7$$
$$x_1,x_2,p_i,n_i\geqslant 0,\ i=1,2,3,4,5$$

现在这里 P_1,P_2,P_3,P_4 仅是一种符号，表示优先等级，其实也是各自的权，最高优先数是保证 p_1+p_2 达到最小，即 $4x_1+5x_2\leqslant 80$，$4x_1+2x_2\leqslant 48$，在保证最优先级的前提下，力求 $80x_1+100x_2\geqslant 800$，再其次为 $x_1\leqslant 6$，最后为 $x_1+x_2\leqslant 7$。

在第 9 章矩阵博弈的混合策略中，把混合策略看作各种纯策略的概率分布。在这种意义下，混合策略就是多个纯策略按概率加权的单策略。因此，混合策略可视为加权的多目标规划。但本章所说的权，仅指各个目标的优先等级，与多个目标按“权”形成单目标的意思不一样。

【例 7.2】 一作坊生产两种产品，产品 P_1 每单位产品净获利润 10 元，产品 P_2 每单位产品净获利润 8 元，P_1 产品每单位产品需机器时间 3 小时，P_2 产品为 2 小时，公司每周共有机器时数 120 小时，适当的加班是允许的，但加班生产的产品单位利润各降 1 元。根据合同，每周两种产品各需提供 30 单位。根据上述条件建立如下的目标优先顺序：

1. 在有效机器时间 120 小时内首先满足合同。
2. 其次加班时数应尽量减少，假定每周加班不超过 20。
3. 最后利润要求每周至少为 800 元。

令 x_1 = 产品 P_1 在正常开工时间内每周产量；

x_2 = 产品 P_1 在加班时间内每周产量；

x_3 = 产品 P_2 在正常开工时间内每周产量；

x_4 = 产品 P_2 在加班时间内每周产量。

因此

$$\begin{aligned}&x_1+x_2\geqslant 30\\&x_3+x_4\geqslant 30\\&3x_1+2x_3\leqslant 120\\&3x_2+2x_4\leqslant 20\\&10x_1+9x_2+8x_3+7x_4\geqslant 800\\&x_i\geqslant 0,\ i=1,2,3,4\end{aligned}$$

$$\min z=P_1(n_1+n_2+p_3)+P_2p_4+P_3n_5$$

$$\begin{aligned}\text{s.t.}\quad &x_1+x_2+n_1-p_1=30\\&x_3+x_4+n_2-p_2=30\\&3x_1+2x_3+n_3-p_3=120\\&3x_2+2x_4+n_4-p_4=20\\&10x_1+9x_2+8x_3+7x_4+n_5-p_5=800\\&x_i\geqslant 0,\ i=1,2,3,4,\ p_j,\ n_j\geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,5\end{aligned}$$

7.3　多目标规划的几何解释

先举例说明。

【例 7.3】

$$\min z=P_1(p_1+p_2)+P_2n_3+P_3p_4+P_4p_5$$

$$\begin{aligned}\text{s.t.}\quad &4x_1+5x_2+n_1-p_1=80(G_1)\\&4x_1+2x_2+n_2-p_2=48(G_2)\\&80x_1+100x_2+n_3-p_3=800(G_3)\\&x_1+n_4-p_4=6(G_4)\\&x_1+x_2+n_5-p_5=7(G_5)\\&x_1,x_2,n_i,p_i\geqslant 0,\ i=1,2,3,4,5\end{aligned}$$

图 7.1 画出了各约束条件。

首先保证满足第 1 目标，即令 $p_1=p_2=0$，可行解域为图 7.2 的影线部分。

进一步满足第 2 目标，即 $n_3=0$，得可行解域又缩为图 7.3 的影线域。

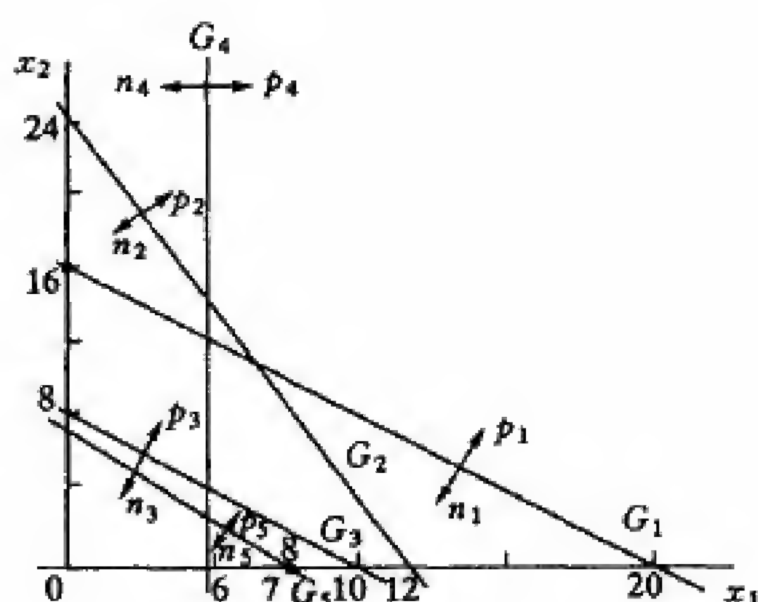
再考虑第 3 个目标，即，得图 7.4 中阴影部分代表的可行解域。

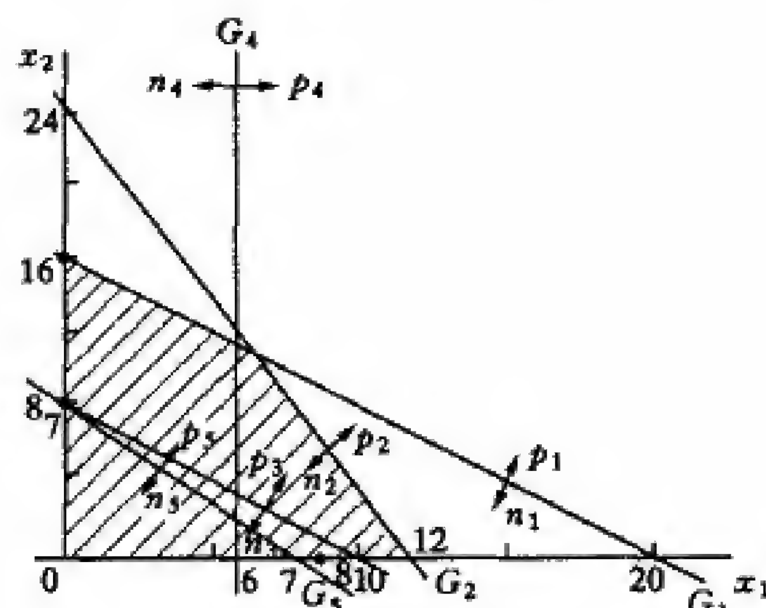
最优解为(0,8)点，即 $x_1=0$，$x_2=8$，该点使 p_5 达到最小，过(0,8)点引 $x_1+x_2=c$ 的平行线，$c=8$，故 $p_5=1$。（图 7.5）

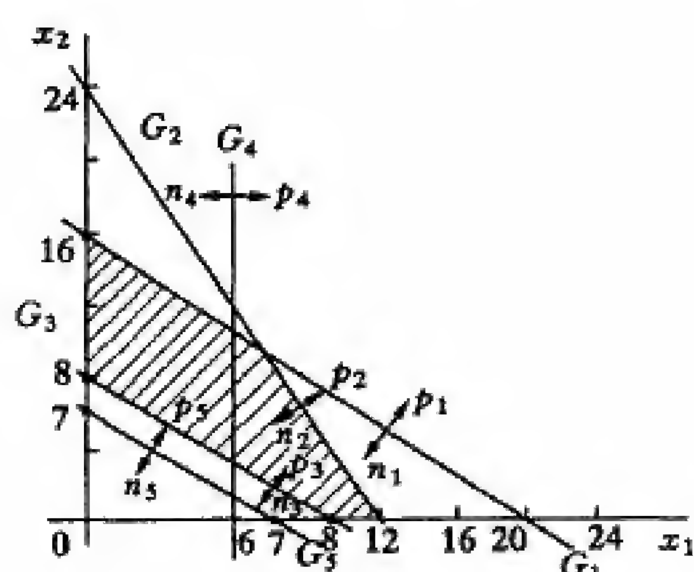
【例 7.4】

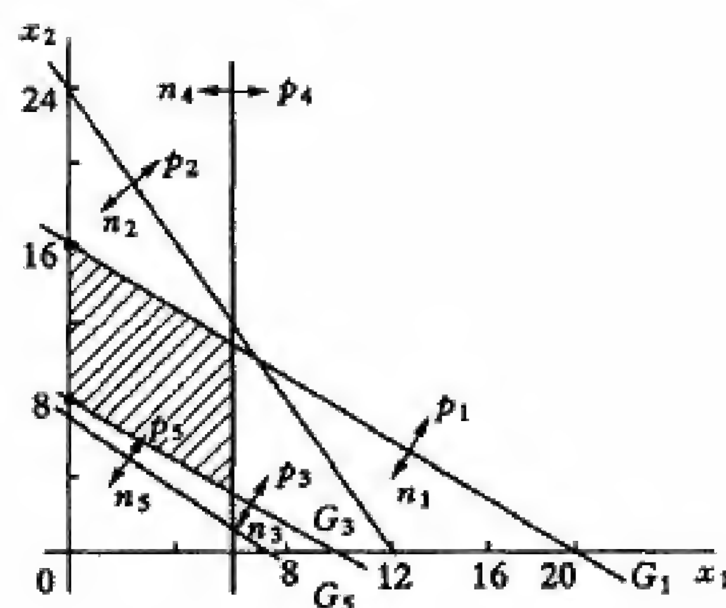
$$\min z=P_1p_1+P_2n_2+P_3n_3$$

$$\begin{aligned}\text{s.t.}\quad &x_1+x_2+n_1-p_1=10\\&2x_1+x_2+n_2-p_2=26\end{aligned}$$


图 7.1

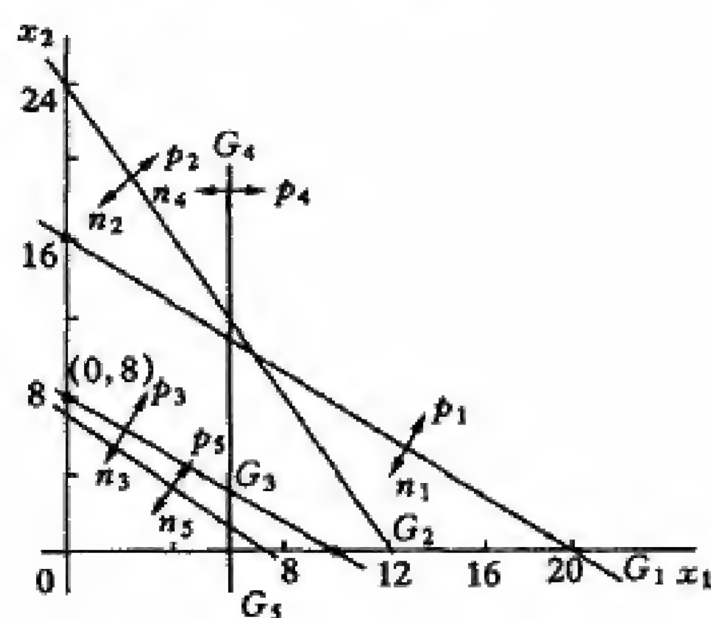

图 7.2


图 7.3


图 7.4

$$-x_1+2x_2+n_3-p_3=6$$
$$x_1,x_2,n_i,p_i\geqslant 0,\ i=1,2,3$$

约束条件及可行解域如图 7.6 所示。


图 7.5

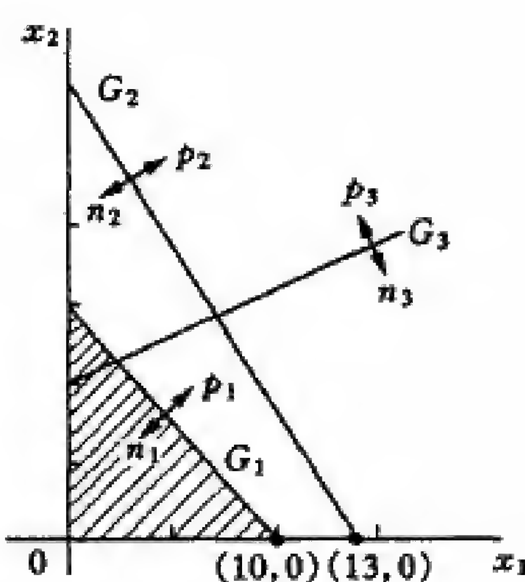


图 7.6

若考虑第 1 目标，图 7.6 中的影线域是可行解域。若考虑第 2 目标，则(10,0)点使 n_2 达到最小，过(10,0)引 $2x_1+x_2=c$ 的平行线，$c=20$，$n_2=6$，第 3 目标放弃，即第 3 目标不能完全达到。因为第 2 目标的优先级高于第 3 目标。故只能在保证第 2 目标条件下，求第 3 目标尽可能好一些。

【例 7.5】　某工厂生产 A，B 两种产品，若生产产品 A，每单位需加工 2 个机时，生产产品

B 每单位需加工 1 个机时，工厂每周开工时间为 140 机时，根据市场预测产品 A 每周需求量不超过 60 个单位，B 产品不超过 100 单位，产品 A 的利润为 300 元/单位，产品 B 的利润为 120 元/单位，问应如何安排生产。

$$\max z = 300x_1 + 120x_2$$
$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad & 2x_1 + x_2 \leqslant 140 \\ & x_1 \leqslant 60 \\ & x_2 \leqslant 100 \\ & x_1, x_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

其中，x_1 为产品 A 的每周生产单位数，x_2 为产品 B 的每周生产单位数。

结果：A 产品生产 60 单位，B 产品生产 20 单位，每周利润为 $z = 20\ 400$ 元。

若改变为：

第 1 目标：利润不少于 25 000 元。

第 2 目标：(1)加工时数不超过 140 机时；(2)产品 A 不超过 60 单位；(3)产品 B 不超过 100 单位。

则有

$$\min z = P_1 n_1 + P_2(p_2 + p_3 + p_4)$$
$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad & 300x_1 + 120x_2 - p_1 + n_1 = 25\ 000 \\ & 2x_1 + x_2 - p_2 + n_2 = 140 \\ & x_1 - p_3 + n_3 = 60 \\ & x_2 - p_4 + n_4 = 100 \\ & x_1, x_2, p_1, n_1, p_2, n_2, p_3, n_3, p_4, n_4 \geqslant 0 \end{aligned}$$

约束条件如图 7.7 所示。

显然第 2 个目标是不能完全达到的，只能求得 $p_2 + p_3 + p_4$ 尽可能小(见图 7.8)。

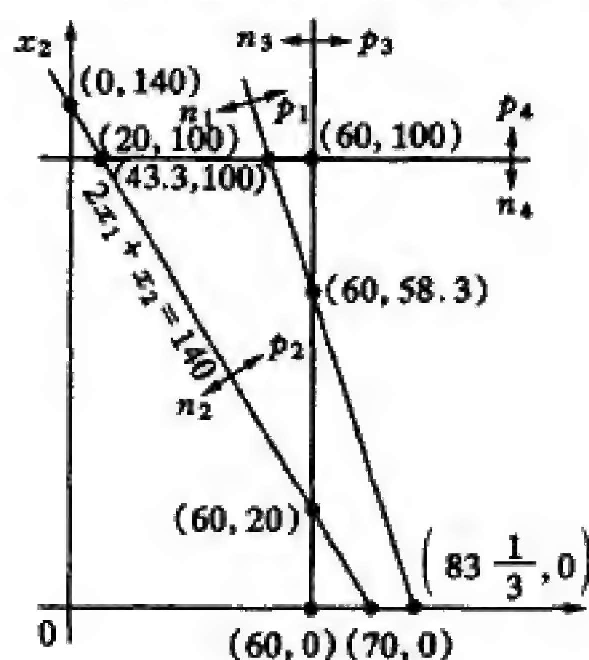


图 7.7

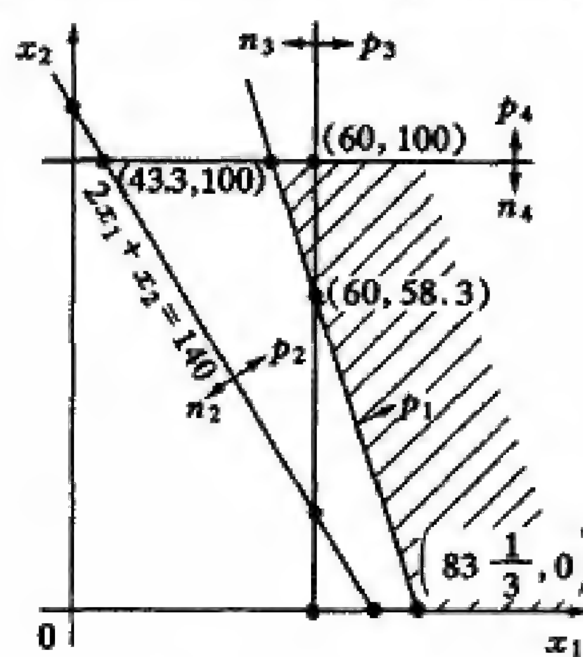


图 7.8

对于(60, 100)点，$p_3 = p_4 = 0$，(60, 58.3)点 $p_3 = p_1 = 0$，但 p_2 也不为 0；(43.3, 100)点，$p_1 = p_4 = 0$，p_2 也不为 0，不过 p_2 较小。从直观也可见到在(60, 58.3)点 p_2 处最小，即为最佳方案，第 1 目标完全达到，第 2 目标部分满足，由于 $p_2 > 0$，即加工时数超过了 140 机时，原来的

$$2x_1 + x_2 \leqslant 140$$

的条件不能满足。

【例 7.6】 某工厂生产 A,B 两种产品,每小时均可生产 1 000 单位,工厂正常开工为每周 80 小时,根据市场预测,产品 A 需求量为每周 70 000 单位,产品 B 需求量为每周 45 000 单位,产品 A 的利润为每单位 2.50 元,产品 B 的利润为每单位 1.50 元。

第 1 目标:避免开工不足;

第 2 目标:加班时数不超过 10 小时;

第 3 目标:努力达到最大销售量;

第 4 目标:尽可能减少加班时数。

设 x_1, x_2 分别是产品 A,B 的产量,以 1 000 为单位,则

$$\min z = P_1 n_1 + P_2 p_4 + P_3(5n_2 + 3n_3) + P_4 p_1$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 + n_1 - p_1 = 80$$

$$x_1 + n_2 - p_2 = 70$$

$$x_2 + n_3 - p_3 = 45$$

$$x_1 + x_2 + n_4 - p_4 = 90$$

$$x_1, x_2, n_1, n_2, n_3, n_4, p_1, p_2, p_3, p_4 \geqslant 0$$

请注意这里由于产品 A 的利润为 2.5 元/单位,而产品 B 的利润为 1.5 元/单位,故第 3 目标 n_2 的权为 5, n_3 的权为 3。即 n_2 和 n_3 的目标级权相同,但系数加权不同。

图 7.9 画出了约束条件。

若考虑第 1 目标,即 $n_1 = 0$,以及加班时间限制在 10 小时内,即 $p_4 = 0$,故解域缩为图 7.10 中的影线部分。

但由于第 3 个目标 n_2 的权高于 n_3,故(20, 70)点是最佳点。第 4 个目标为 $p_1 = 0$ 这是不可能的,第 4 个目标必须服从于第 3 个目标。

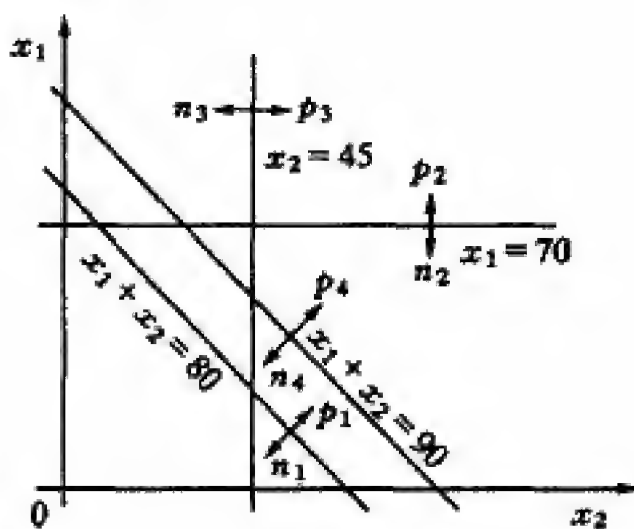


图 7.9

若在上面例子中,有一老主顾急需产品 A100 000 单位,必须将这项任务作为第一目标,将保持正常开工作为第 2 目标,第 3 目标为将加班时间尽可能减少,第 4 个目标为尽可能多地销售产品 B。

则有

$$\min z = P_1 n_2 + P_2 n_1 + P_3 p_1 + P_4 n_3$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 + n_1 - p_1 = 80$$

$$x_1 + n_2 - p_2 = 100$$

$$x_2 + n_3 - p_3 = 45$$

$$x_1, x_2, n_1, n_2, n_3, p_1, p_2, p_3 \geqslant 0$$

约束条件如图 7.11 所示。

为了满足第 1 目标,允许解域在 $x_1 = 100$ 的上方,这样第 2 目标自动满足,第 3 个目标不能达到,但尽量做到使 p_1 达到最小,显然这一点是 $x_1 = 100, x_2 = 0$,第 4 个目标是达不到的。

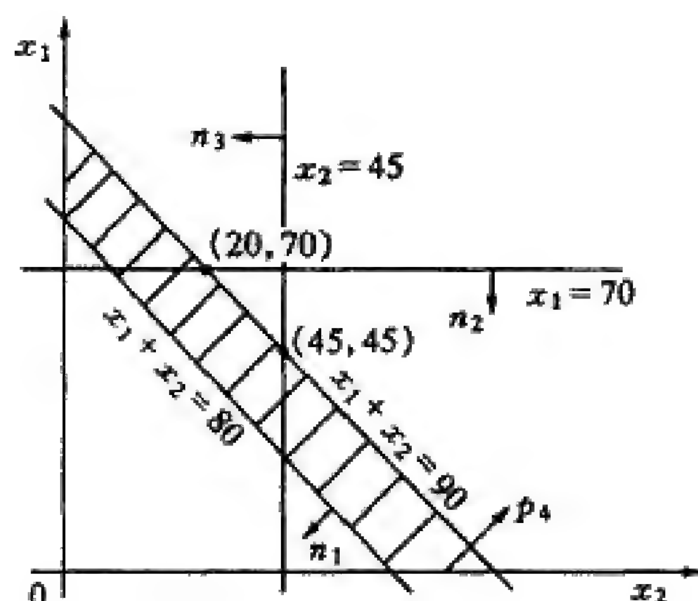


图 7.10

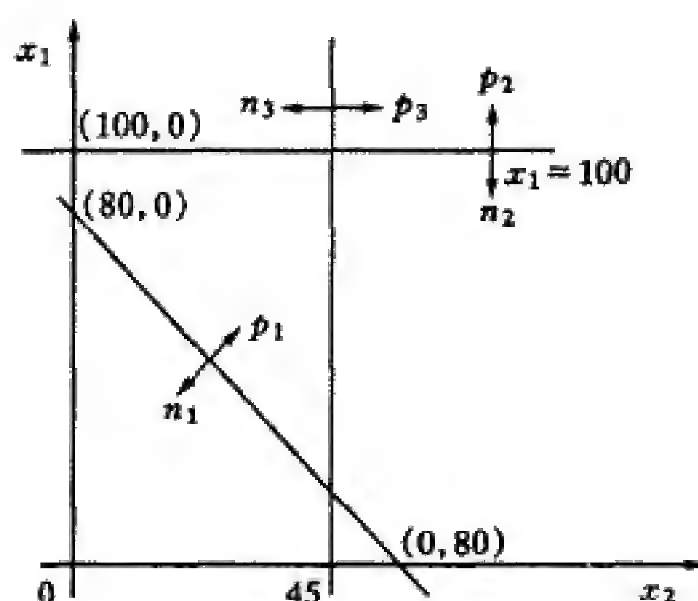


图 7.11

7.4 多目标规划的单纯形表格

多目标规划的单纯形表格实质上就是线性规划的单纯形表格。

举例说明如下：

【例 7.7】 某公司生产 A,B 两种产品,每单位所需的机器时间相同,都是 1 单位时间。A 的单位利润为 25 万元,B 的单位利润为 15 万元。该公司生产能力为每月 80 单位机器时间,市场估计 A 的每月最高需求量为 70 单位,B 的每月最高需求量为 45 单位。若仅考虑最高利润,则导致解下面线性规划问题。设 x_1,x_2 分别为 A,B 的每月产量。

$$\max\ z=25x_1+15x_2$$

$$\text{s.t.}\quad x_1+x_2\leqslant 80$$

$$0\leqslant x_1\leqslant 70,0\leqslant x_2\leqslant 45$$

若考虑下列目标

1. 第 1 目标为避免开工不足；
2. 第 2 目标为避免加班时数超过 10 单位机器时数；
3. 第 3 目标为 A,B 达到各自的最高销售目标；
4. 第 4 目标为加班时数尽可能少。

$$\min\ z=P_1n_1+P_2p_4+5P_3n_2+3P_3n_3+P_4p_1$$

$$\begin{aligned}\text{s.t.}\quad & x_1+x_2+n_1-p_1=80\\ & x_1+n_2-p_2=70\\ & x_2+n_3-p_3=45\\ & n_4+p_1-p_4=10\\ & x_1,x_2,n_1,n_2,n_3,n_4,p_1,p_2,p_3,p_4\geqslant 0\end{aligned}$$

这里需要说明的是,n_1 和 n_2 原都属第 3 目标,因 A 产品的利润为每单位 25,而 B 产品的利润为 15,故分别给以权 $5P_3,3P_3$。

下面给出多目标规划的单纯形表格:(如表 7.1)

表 7.1

	C_B	x / C / B	x_1	x_2	n_1	n_2	n_3	n_4	p_1	p_2	p_3	p_4	β
			0	0	P_1	$5P_3$	$3P_3$	0	P_4	0	0	P_2	
n_1	P_1	80	1	1	1	0	0	0	−1	0	0	0	80
n_2	$5P_3$	70	1	0	0	1	0	0	0	−1	0	0	70
n_3	$3P_3$	45	0	1	0	0	1	0	0	0	−1	0	
n_4	0	10	0	0	0	0	0	1	1	0	0	−1	
	P_4	485	0	0					1	0	0	0	
	P_3		−5	−3					0	5	3	0	
c_i-z_i	P_2		0	0					0	0	0	1	
	P_1		−1	−1					1	6	0	0	

在这里 P_1, P_2, P_3, P_4 作为系数处理，可以看作 $P_1 \gg P_2 \gg P_3 \gg P_4$。$A \gg B$ 意味着对于任意正常数 k，恒有 $A > kB$ 和 $A > B + k$。$c_i - z_i$ 行第 2 列自上而下为 P_4, P_3, P_2, P_1，因为 x_1 列的 $c_i - z_i$ 应为 $-P_1 - 5P_3$，所以该列在 P_1 行的数为 −1，P_3 行的数为 −5，其余 P_2, P_4 行为 0，余类推。故 x_1 作为进入基，取代 n_2。办法同单纯形法。下面以 a_{21} 作为主元素进行消元，结果如表 7.2 所示。

表 7.2

	C_B	x / C / B	x_1	x_2	n_1	n_2	n_3	n_4	p_1	p_2	p_3	p_4	β
			0	0	P_1	$5P_3$	$3P_3$	0	P_4	0	0	P_2	
n_1	P_1	10	0	(1)	1	−1	0	0	−1	1	0	0	⑩
x_1	0	70	1	0	0	1	0	0	0	−1	0	0	45
n_3	$3P_3$	45	0	1	0	0	1	0	0	0	−1	0	
n_4	0	10	0	0	0	0	0	1	1	0	0	−1	
	P_4			0		0			1	0	0	0	
c_i-z_i	P_3	135		−3		5			0	0	3	0	
	P_2			0		0			0	0	0	1	
	P_1	10		−1		1			1	−1	0	0	
x_2	0	10	0	1	1	−1	0	0	−1	1	0	0	
x_1	0	70	1	0	0	1	0	0	0	−1	0	0	
n_3	$3P_3$	35	0	0	−1	1	1	0	1	−1	−1	0	
n_4	0	10	0	0	0	0	0	1	(1)	0	0	−1	
	P_4				0				1	0	0	0	
c_i-z_i	P_3	105			3	2			−3	3	3	0	
	P_2				0				0			1	35
	P_1				1				0			0	10
x_2	0	20	0	1	0	0	1	1	0	0	−1	−1	
x_1	0	70	1	0	0	1	0	0	0	−1	0	0	
n_3	$3P_4$	25	0	0	−1	1	0	0	0	−1	−1	1	
p_1	0	10	0	0	0	0	1	1	1	0	0	−1	
	P_4	25			0	0			1	(1)	0	0	
c_i-z_i	P_3				3	2			0	3	3	−3	
	P_2				0	0			0	0	0	1	
	P_1				1	0			0	0	0	0	

所以 $x_1=70, x_2=20, p_1=10, n_3=25$，使第 1 目标，第 2 目标得到满足，第 3 目标得到部分满足，第 4 目标 $p_1=10$ 未达到最小。

7.5 多目标规划的目标序列化方法

上节讨论的单纯形表格法实际上是单纯形表格的变形，从实践中体验到其实质是先解决第 1 目标问题，然后依次解决第 2，第 3 等目标问题，所以可以依顺序进行。关键一点是在从优先级高转入低一级时，非基变量的 c_i-z_i 为正的，应退出，因它的进入将损害优先级高的目标。在作形式化说明之前，先通过例子说明。

【例 7.8】

$$\min z=P_1(p_1+p_2)+P_2n_3+P_3p_4+P_4(n_1+1.5n_2)$$

$$\begin{aligned}\text{s.t.}\quad & x_1+n_1-p_1=30\\ & x_2+n_2-p_2=15\\ & 8x_1+12x_2+n_3-p_3=1000\\ & x_1+2x_2+n_4-p_4=40\\ & x_1,x_2,n_i,p_i\geqslant 0,\ i=1,2,3,4\end{aligned}$$

第一阶段：

$$\min z_1=p_1+p_2$$

$$\begin{aligned}\text{s.t.}\quad & x_1+n_1-p_1=30\\ & x_2+n_2-p_2=15\\ & x_1,x_2,n_1,n_2,p_1,p_2\geqslant 0\end{aligned}$$

表 7.3 是其单纯形表格。

表 7.3

B	C_B	b \ x / C	x_1	x_2	n_1	n_2	p_1	p_2	β
			0	0	0	0	1	1	
n_1	0	30	1	0	1	0	−1	0	
n_2	0	15	0	1	0	1	0	−1	
							1	1	

$n_1=30, n_2=15, x_1=x_2=p_1=p_2=0, z_1^*=p_1+p_2=0$。

由 $p_1+p_2=0, p_1, p_2\geqslant 0$，故 $p_1=p_2=0$，得第二阶段。

$$\min z_2=n_3$$

$$\begin{aligned}\text{s.t.}\quad & x_1+n_1=30\\ & x_2+n_2=15\\ & 8x_1+12x_2+n_3-p_3=1\,000\\ & x_1,x_2,n_1,n_2,n_3,p_3\geqslant 0\end{aligned}$$

其单纯形表格见表 7.4。

表 7.4

B	C_B	x / C / b	x_1	x_2	n_1	n_2	n_3	p_3	β
			0	0	0	0	1	0	
n_1	0	30	1	0	1	0	0	0	
n_2	0	15	0	(1)	0	1	0	0	(15)
n_3	1	1 000	8	12	0	0	1	-1	1 000/12
		1 000	-8	(-12)	0	0	0	1	
n_1	0	30	(1)	0	1	0	0	0	30
x_2	0	15	0	1	0	1	0	0	
n_3	1	820	8	0	0	-12	1	-1	$102\frac{1}{2}$
		820	-8	0	0	12	0	1	
x_1	0	30	1	0	1	0	0	0	
x_2	0	15	0	1	0	1	0	0	
n_3	1	580	0	0	-8	-12	1	-1	
		580	0	0	8	12	0	1	

$x_1=30, x_2=15, z_2^*=n_3=580$

请注意表 7.4 中 n_1, n_2, p_3 列的 c_i-z_i 值都是正，它们若进入基，将破坏第 2 目标的结果，故在进入第 3 目标时可以略去。

$$\begin{aligned}
&\min z_3=p_4\\
&\text{s.t.}\quad x_1=30\\
&\qquad x_2=15\\
&\qquad 8x_1+12x_2=420\\
&\qquad x_1+2x_2+n_2-p_4=40\\
&\qquad x_1, x_2, n_4, p_4\geqslant 0
\end{aligned}$$

故得 $x_1=30, x_2=15, n_4=0, p_4=20, z_3^*=20, z_4^*=n_1+1.5n_2=0$

【例 7.9】

$$\begin{aligned}
&\min z=P_1(p_1+p_2)+P_2n_3+P_3n_4\\
&\text{s.t.}\quad 2x_1+x_2+n_1-p_1=12\\
&\qquad x_1+x_2+n_2-p_2=10\\
&\qquad x_1+n_3-p_3=7\\
&\qquad x_1+4x_2+n_4-p_4=14\\
&\qquad x_1, x_2, n_i, p_i\geqslant 0, i=1,2,3,4
\end{aligned}$$

解第 1 目标：

$$\begin{aligned}
&\min z=p_1+p_2\\
&\text{s.t.}\quad 2x_1-x_2+n_1-p_1=12\\
&\qquad x_1-x_2+n_2-p_1=10\\
&\qquad x_i, n_i, p_i\geqslant 0, i=1,2
\end{aligned}$$

表 7.5 是其单纯形表格。

表 7.5

B	C_B	x / C / b	x_1	x_2	n_1	n_2	p_1	p_2	β
			0	0	0	0	1	1	
n_1	0	12	2	1	1	0	−1	0	
n_2	0	10	1	1	0	1	0	−1	
							1	1	

故 $z_1^* = p_1 + p_2 = 0,\ p_1 = p_2 = 0,\ n_1 = 12,\ n_2 = 10,\ x_1 = x_2 = 0$ 转入第 2 目标：

$$
\begin{aligned}
&\min\ z_2 = n_3 \\
&\text{s.t.}\quad 2x_1 + x_2 + n_1 = 12 \\
&\qquad\quad x_1 + x_2 + n_2 = 10 \\
&\qquad\quad x_1 + n_3 - p_3 = 7 \\
&\qquad\quad x_1, x_2, n_1, n_2, n_3, p_3 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

表 7.6 是其单纯形表格。

表 7.6

B	C_B	x / C / b	x_1	x_2	n_1	n_2	n_3	p_3	β
			0	0	0	0	1	0	
n_1	0	12	(2)	1	1	0	0	0	(6)
n_2	0	10	1	1	0	1	0	0	10
n_3	1	7	1	0	0	0	1	−1	7
		7	1	0	0	0	0	1	
x_1	0	6	1	1/2	1/2	0	0	0	
n_2	0	4	0	1/2	−1/2	1	0	0	
n_3	1	1	0	−1/2	−1/2	0	1	−1	
		1		1/2	1/2	0	0	1	

$x_1 = 6,\ n_2 = 4,\ n_1 = x_2 = p_3 = 0,\ z_2^* = n_3 = 1$，而且 x_2, n_1, p_3 作为非基变量不可能进入基，因它的进入将损坏第 2 目标，故在进入第 3 目标时予以放弃。

$$
\begin{aligned}
&\min\ z_3 = p_4 \\
&\text{s.t.}\quad 2x_1 = 12 \\
&\qquad\quad x_1 + n_2 = 10 \\
&\qquad\quad x_1 + 1 = 7 \\
&\qquad\quad x_1 + n_4 - p_4 = 4
\end{aligned}
$$

所以 $n_2 = 4,\ n_4 = 0,\ p_4 = 2$，故 $x_1 = 6,\ x_2 = 0,\ z_1^* = 0,\ z_1^* = 1,\ z_1^* = 2$。

7.6 多目标规划的灵敏度分析

举例说明如下：

$$
\min\ z = P_1(p_1 + p_2) + P_2(n_3 + 2n_4) + P_3 n_1 + P_4 p_4
$$

s.t.　$x_1+n_1-p_1=20$

$$x_2+n_2-p_2=35$$

$$-5x_1+3x_2+n_3-p_3=220$$

$$x_1-x_2+n_4-p_4=60$$

$$x_1,x_2,n_i,p_i\geqslant 0,\ i=1,2,3,4$$

做表上运算(见表 7.7).

表 7.7

B	C_B	b \ C \ x	x_1	x_2	n_1	n_2	n_3	n_4	p_1	p_2	p_3	p_4	β
			0	0	P_3	0	P_2	$2P_2$	P_1	P_1	0	0	
n_1	P_3	20	1	0	1	0	0	0	−1	0	0	0	
n_2	0	35	0	(1)	0	1	0	0	0	−1	0	0	35
n_3	P_2	220	−5	3	0	0	1	0	0	0	−1	0	220/3
n_4	$2P_2$	60	1	−1	0	0	0	1	0	0	0	−1	
	P_3	20	−1	0					1	0	0	0	
c_i-z_i	P_2	340	3	−1					0	0	1	2	
	P_1	0	0	0					1	1	0	0	
n_1	P_3	20	1	0	1	0	0	0	−1	0	0	0	
n_2	0	35	0	1	0	1	0	0	0	−1	0	0	
n_3	P_2	115	−5	0	0	−3	1	0	0	3	−1	0	
n_4	$2P_2$	95	1	0	0	1	0	1	0	−1	0	−1	
	P_3	20	−1			0			1	0	0	0	
c_i-z_i	P_2	305	3			1			0	−1	1	2	
	P_1	0	0			0			1	1	0	0	

表 7.7 中最后一轮两虚线间的矩阵即为 $\boldsymbol{B}^{-1}$,即基变量 n_1,x_2,n_3,n_4 的基矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵

$$\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&-3&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}$$

表 7.7 中最后一轮两虚线间的矩阵即为 $\boldsymbol{B}^{-1}$,即基变量的基矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵。

【例 7.10】　若右端项第 2 个数从原先的 35 改为 40,则

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&-3&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}20\\40\\220\\60\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20\\40\\100\\100\end{bmatrix}$$

结果基不变,只不过第 2 个基 x_2 的值改为 40,第 3 个基 n_3 和第 4 个基 n_4 都改为 100,其余不变。

第 1 和第 4 目标达到,第 2 目标的值改为 300,第 3 目标没变化。

【例 7.11】　若矩阵 **A** 的系数变化,例如 a_{31}从 −5 改为 2,则

$$B^{-1}a_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&-3&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\2\\1\end{bmatrix}$$

对应的 c_1-z_1 改变为：

$$-(\boldsymbol{P}_3\ \boldsymbol{P}_2\ \boldsymbol{P}_2\ 2\boldsymbol{P}_2)\begin{bmatrix}1\\0\\2\\1\end{bmatrix}=-4\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_3$$

进行表上运算(见表 7.8)。

表 7.8

B	C_B	x \ b	x_1	x_2	n_1	n_2	n_3	n_4	p_1	p_2	p_3	p_4	β
		C	0	0	P_3	0	P_2	$2P_2$	P_1	P_1	0	0	
n_1	P_3	20	(1)	0	1	0	0	0	−1	0	0	0	(20)
x_2	0	35	0	1	0	1	0	0	0	−1	0	0	
n_3	P_2	115	2	0	0	−3	1	0	0	3	−1	0	115/2
n_4	$2P_2$	95	1	0	0	1	0	1	0	−1	0	−1	95
c_i-z_i	P_3	20	−1			0			1	0	0	0	
	P_2	305	−4			1			0	−1	1	2	
	P_1	0	0			0			1	1	0	0	
x_1	0	20	1	0	1	0	0	0	−1	0	0	0	
x_2	0	35	0	1	0	1	0	0	0	−1	0	0	
n_3	P_2	75	0	0	−2	−3	1	0	2	3	−1	0	
n_4	$2P_2$	75	0	0	−1	1	0	1	1	−1	0	−1	
c_i-z_i	P_3	0			1	0			0	0	0	0	
	P_2	25			4	1			−4	−1	1	2	
	P_1	0			0	0			1	1	0	0	

【例 7.12】 参数目标规划

$$\min z=P_1(p_1+p_2)+P_2(n_3+n_4(1+r))+P_3n_1$$

$$\begin{aligned}\text{s.t.}\quad & x_1+n_1-p_1=20\\ & x_2+n_2-p_2=35\\ & -5x_1+3x_2+n_3-p_3=220\\ & x_1-x_2+n_4-p_4=60\\ & x_1,x_2,n_i,p_i\geqslant 0,\ i=1,2,3,4\end{aligned}$$

令 $r=0$，表 7.9 是 $r=0$ 时的单纯形表格。

【例 7.13】 参数 r 出现在右端项：

$$\min z=P_1(p_1+p_2)+P_2(n_3+2n_4)+P_3n_1$$

$$\begin{aligned}\text{s.t.}\quad & x_1+n_1-p_1=20-r\\ & x_2+n_2-p_2=35+r\\ & -5x_1+3x_2+n_3-p_3=220\\ & x_1-x_2+n_4-p_4=60+2r\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, n_i, p_i \geqslant 0, i=1,2,3,4$$

表 7.9

B	C_B	b \ x / C	x_1	x_2	n_1	n_2	n_3	n_4	p_1	p_2	p_3	p_4	β
			0	0	P_3	0	P_2	P_2	P_1	P_1	0	0	
n_1	P_3	20	1	0	1	0	0	0	−1	0	0	0	
n_2	0	35	0	(1)	0	1	0	0	0	−1	0	0	35
n_3	P_2	220	−5	3	0	0	1	0	0	0	−1	0	220/3
n_4	P_2	60	1	−1	0	0	0	1	0	0	0	−1	
	P_3	20	1						1	0	0	0	
c_j-z_j	P_2	280	4	−2					0	0	1	1	
	P_1	0	0						1	1	0	0	
n_1	P_3	20	1	0	(1)	0	0	0	−1	0	0	0	(20)
x_2	0	35	0	1	0	1	0	0	0	−1	0	0	
n_3	P_2	115	−5	0	0	−3	1	0	0	3	−1	0	24
n_4	P_2	95	1	0	0	1	0	1	0	−1	0	−1	
	P_3	0	0			0			1	0	0	0	
c_j-z_j	P_2	210	4			2			0	−2	1	1	
	P_1	0	0			0			1	−1	0	0	

$r=0$ 时的解见前面。基变量为 n_1, x_2, n_3, n_4 时有

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}20-r\\ 35+4\\ 220\\ 60+2r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20-r\\ 35+r\\ 115-3r\\ 95+3r\end{bmatrix}$$

建立单纯形表格(见表 7.10)。

表 7.10

B	C_B	B \ x / C	x_1	x_2	n_1	n_2	n_3	n_4	p_1	p_2	p_3	p_4	β
			0	0	P_3	0	P_2	$2P_2$	P_1	P_1	0	0	
n_1	P_3	$20-r$	1	0	1	0	0	0	−1	0	0	0	
x_2	0	$35+r$	0	1	0	1	0	0	0	−1	0	0	
n_3	P_2	$115-3r$	−5	0	0	−3	1	0	0	3	−1	0	
n_4	$2P_2$	$95+3r$	1	0	0	1	0	1	0	−1	0	−1	
	P_3	$20-r$	−1			0			0	0	0	0	
c_j-z_j	P_2	$305+3r$	3			1			1	−1	1	2	
	P_1	0	0			0			1	1	0	0	

若 $20-r\geqslant 0, 35+r\geqslant 0, 115-3r\geqslant 0, 95+3r\geqslant 0$，即若 $-31\frac{2}{3}\leqslant r\leqslant 2$ 时，上面单纯形表格给出最优解。若 $r<-31\frac{2}{3}$，则 $95+3r<0$，利用对偶单纯形法于上面单纯形表格，得表 7.11。

表 7.11

B	C_B	x / b \ C	x_1	x_2	n_1	n_2	n_3	n_4	p_1	p_2	p_3	p_4	β
			0	0	P_3	0	P_2	$2P_2$	P_1	P_1	0	0	
n_1	P_3	$20-r$	1	0	1	0	0	0	−1	0	0	0	
x_2	0	$35+r$	0	1	0	1	0	0	0	−1	0	0	
n_3	P_2	$115-3r$	−5	0	0	−3	1	0	0	3	−1	0	
p_4	0	$-95-3r$	−1	0	0	−1	0	−1	0	1	0	1	
	P_3	$20-r$	−1			0			1	0	0		
c_i-z_i	P_2	$115-3r$	5			3			0	−3	1		
	P_1	0				0			1	1	0		

若 $20-r\geqslant 0, 35+r\geqslant 0, 115-3r\geqslant 0, -95-3r\geqslant 0$，即 $-35\leqslant r\leqslant -31\frac{2}{3}$ 时，表 7.11 给出最优解。

类似的办法可讨论，$115-3r\geqslant 0, 20-r\leqslant 0$，即若 $r\leqslant 38\frac{1}{3}$，$r\geqslant 20$ 或 $20<r\leqslant 38\frac{1}{3}$ 时解的情况，这时利用对偶单纯形法，主元素为 n_1 行、p_1 列(见表 7.12)。

表 7.12

B	C_B	x / b \ C	x_1	x_2	n_1	n_2	n_3	n_4	p_1	p_2	p_3	p_4	β
			0	0	P_3	0	P_2	$2P_2$	P_1	P_1	0	0	
p_1	P_1	$r-20$	−1	0	−1	0	0	0	1	0	0	0	
x_2	0	$35+r$	0	1	0	1	0	0	0	−1	0	0	
n_3	P_2	$115-3r$	−5	0	0	−3	1	0	0	3	−1	0	
n_4	$2P_2$	$95+3r$	1	0	0	1	0	1	0	−1	0	−1	
	P_3	0	0		1	0				0	0	0	
c_i-z_i	P_2	$305+3r$	3		0	1				−1	1	2	
	P_1	$r-20$	1		1	0				1	0	0	

7.7 不相容线性不等式组的测定与校正

由上可知，利用偏差和优先级概念，有冲突的线性多目标规划实质上演变成处理不相容线性不等式组的问题。首先，优先级的引入，使得目标函数与约束条件没有差别。其次，加入适当的偏差后，等式约束与不等式约束也没有差别。因此，线性多目标规划的基本问题可以认为是对不相容线性不等式组的测定与校正。本节对此问题给出一种比较容易的统一处理方式。

考虑如下线性不等式组：

$$\boldsymbol{A}x\geqslant\boldsymbol{B} \tag{7.7.1}$$

其中 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 $m\times n$ 矩阵($m\geqslant 1, n\geqslant 2$)，$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_1,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}$ 分别是 n 维向量和 m 维向量。不等式组(7.7.1)被称之为不可约不相容线性不等式组，如果它本身不相容，但它的每一个真子系统相容，一般的不相容线性不等式组可能不是不可约的。如果(7.7.1)不相容但非不可约，那么首先应该找出其中的不可约不相容子系统，然后校正每个不可约不相容子系统的右端，使之变成相容。右端被校正的量，对目标规划而言就是某目标离要求的最小距离。

(7.7.1)的初始相容子系统是容易找出的。例如，第一个不等式

$$a_1X=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\geqslant b_1,n\geqslant 2,a_1\neq 0$$

显然是相容的并且存在无数个内点满足

$$a_1X>b_1$$

不失一般性，假定

$$A_kX=\begin{bmatrix}a_1\\\vdots\\a_k\end{bmatrix}X\geqslant B_k=\begin{bmatrix}b_1\\\vdots\\b_k\end{bmatrix},1\leqslant k<m \tag{7.7.2}$$

为(7.7.1)的初始相容子系统，且 X^0 是(7.7.2)的一个初始内点，即

$$A_kX^0>B_k$$

在(7.7.2)中，行向量 $a_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$。

考虑线性规划

$$a_{k+1}X\to\max,\ A_kX\geqslant B_k \tag{7.7.3}$$

按假定(7.7.3)的约束系统是相容的并且有初始内点 X^0。因此可以采用等高面法求解(7.7.3)(见2.10节)。如果

$$\max a_{k+1}X\geqslant b_{k+1}$$

则不等式组

$$A_{k+1}X=\begin{bmatrix}a_1\\\vdots\\a_{k+1}\end{bmatrix}X\geqslant B_{k+1}=\begin{bmatrix}b_1\\\vdots\\b_{k+1}\end{bmatrix} \tag{7.7.4}$$

是(7.7.1)的相容子系统；否则，在(7.7.4)中至少存在一个(7.7.1)的不可约不相容子系统。

定理 7.1 设 $j_1,\cdots,j_k$ 为 $1,\cdots,k$ 的一种排列，y^* 满足

$$a_iy^*=b_i,(i=j_1,\cdots,j_k,1\leqslant s\leqslant k,\sum_{r=1}^{s}\alpha_r a_{j_r}^{\mathrm{T}}\neq 0,\forall\alpha_1,\cdots,\alpha_s\in R^1,\sum_{r=1}^{s}\alpha_r^2\neq 0), \tag{7.7.5}$$

$$a_iy^*>b_i,(i=j_{s+1},\cdots,j_k).$$

假定

$$a_{k+1}^{\mathrm{T}}=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i a_{j_i}^{\mathrm{T}},(\lambda_i\leqslant 0,i=1,\cdots,s,1\leqslant s\leqslant k) \tag{7.7.6}$$

及

$$a_{k+1}y^*<b_{k+1} \tag{7.7.7}$$

不失一般性，在(7.7.6)中可认为

$$\lambda_i<0(i=1,\cdots,q,1\leqslant q\leqslant s). \tag{7.7.8}$$

则线性不等式组

$$\begin{aligned}&a_{j_i}x\geqslant b_{j_i},(i=1,\cdots,q),\\&a_{k+1}x\geqslant b_{k+1}\end{aligned} \tag{7.7.9}$$

是(7.7.4)的不可约不相容子系统,且

$$\boldsymbol{\lambda}=(-\lambda_1,\cdots,-\lambda_q,1)^{\mathrm{T}} \tag{7.7.10}$$

是(7.7.4)的信息向量。(信息向量的定义见参考文献[7])

证明:令

$$\overline{\boldsymbol{A}}_q=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_{j_1}\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_{j_q}\\ \boldsymbol{a}_{k+1}\end{bmatrix},\overline{\boldsymbol{B}}_q=\begin{bmatrix}b_{j_1}\\ \vdots\\ b_{j_q}\\ b_{k+1}\end{bmatrix} \tag{7.7.11}$$

则由(7.7.5)和(7.7.6),(7.7.8)知

$$\mathrm{ran}\overline{\boldsymbol{A}}_q=q$$

及

$$\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{A}}_q=0,(\lambda>0) \tag{7.7.12}$$

由(7.7.5)~(7.7.7),(7.7.12)得

$$\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{B}}_q>\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{A}}_q\boldsymbol{y}^*=0$$

因此(7.7.9)是(7.7.4)的一个不可约不相容子系统;又由(7.7.12)知 $\boldsymbol{\lambda}$ 是其信息向量。证毕。

现在假定(7.7.1)不相容。不失一般性,可认为(7.7.2)相容而(7.7.4)不相容。根据定理7.1,利用等高面算法求解(7.7.3)。可找到一个形如(7.7.9)的不可约不相容子系统,其信息向量为(7.7.10);还可找到(7.7.2)的一个内点 x^i 及一个满足(7.7.5)的最高边界点 $\boldsymbol{y}^*$。按记号(7.7.11),不可约不相容线性不等式组(7.7.9)被写成

$$\overline{\boldsymbol{A}}_q\boldsymbol{X}\geqslant\overline{\boldsymbol{B}}_q,(1\leqslant q\leqslant n) \tag{7.7.13}$$

校正(7.7.13)右端 $\overline{\boldsymbol{B}}_q$ 的基本定理如下:

定理 7.2 设(7.7.13)为不可约不相容线性不等式组,满足(7.7.12)的 $\boldsymbol{\lambda}$ 为其信息向量。则系统

$$\overline{\boldsymbol{A}}_q\boldsymbol{X}\geqslant\overline{\boldsymbol{B}}_q+\Delta\overline{\boldsymbol{B}}_q$$

相容的必要充分条件是

$$\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\overline{\boldsymbol{B}}_q+\Delta\overline{\boldsymbol{B}}_q)\leqslant 0$$

证明:由于(7.7.13)为不可约不相容,故(7.7.13)的前 q 个不等式相容,最后一个不等式与前 q 个不等式矛盾。即存在 $\boldsymbol{y}^*$,使

$$\boldsymbol{a}_{j_i}\boldsymbol{y}^*=b_{j_i},(i=1,\cdots,q)$$

$$\boldsymbol{a}_{k+1}\boldsymbol{y}^*<b_{k+1}$$

令

$$\Delta\overline{\boldsymbol{B}}_q=(0,\cdots,0,\boldsymbol{a}_{k+1}\boldsymbol{y}^*-b_{k+1})^{\mathrm{T}}$$

则

$$\overline{\boldsymbol{A}}_q\boldsymbol{X}\geqslant\overline{\boldsymbol{B}}_q+\Delta\overline{\boldsymbol{B}}_q$$

变成相容。此时由(7.7.12)知

$$\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\overline{\boldsymbol{B}}_q+\Delta\overline{\boldsymbol{B}}_q)\leqslant\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{A}}_q\boldsymbol{X}=0$$

必要性得证。现在证明充分性。由于 $\boldsymbol{\lambda}$ 是(7.7.13)的信息向量，故存在 $x\in R^{q+1}$，使

$$\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{A}}_q\boldsymbol{X}=0.$$

如果 $\Delta\overline{\boldsymbol{B}}_q$ 使

$$\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\overline{\boldsymbol{B}}_q+\Delta\overline{\boldsymbol{B}}_q)\leqslant 0,$$

则有

$$\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{A}}_q\boldsymbol{X}=0\geqslant\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\overline{\boldsymbol{B}}_q+\Delta\overline{\boldsymbol{B}}_q),$$

再由 $\boldsymbol{\lambda}>0$ 得知条件的充分性。证毕。

向量

$$\Delta\overline{\boldsymbol{B}}_q=(\Delta b_{j_1},\cdots,\Delta b_{j_q},\Delta b_{k+1})^{\mathrm{T}}$$

叫做(7.7.13)的校正向量。校正向量使(7.7.9)和(7.7.4)同时变成相容。

习　题

1．一公司有两条生产线生产一种产品，第一生产线每小时生产 5 个单位产品，第二生产线每小时生产 6 个单位产品，每天都开工 8 小时，若目标优先级考虑为：

(a)首先保证完成每天生产 120 单位；

(b)第 2 目标为避免第二生产线加班每天超过 3 小时；

(c)第 3 目标为加班总时数最小；

(d)第 4 目标为尽量避免开工时间不足。

试求问题的解。

2．一工厂有两条生产线生产某一产品，第一生产线每小时生产 2 个单位产品，第二生产线每小时生产 $\frac{1}{2}$ 单位产品，正常开工每周 40 小时，每单位产品获利 100 元。设：

(a)第 1 目标是生产 180 个单位产品；

(b)第 2 目标是限制第一条生产线每周加班不得超过 10 小时；

(c)第 3 目标避免开工不足；

(d)最后目标是加班时数达到最少。假定两条生产线的开工费用相同。

ⅰ)试建立上面问题的目标规划。

ⅱ)若考虑每周利润 19 000 作为以上 4 个目标前面的第 1 目标，如何修改其模型？

ⅲ)若仅考虑一个目标，即利润达最大又如何？

3．分别用图解法、单纯形法、目标序列法求下列问题的解。

$$\begin{aligned}
\min\ z&=P_1(p_1+p_2)+P_2n_3+P_3n_4\\
\text{s.t.}\quad &x_1+x_2+n_1-p_1=400\\
&2x_1+x_2+n_2-p_2=500\\
&x_1+n_3-p_3=300\\
&0.4x_1+0.3x_2+n_4-p_4=240\\
&x_1,x_2,n_i,p_i\geqslant 0,\ i=1,2,3,4
\end{aligned}$$

4．求解

$$\begin{aligned}
\min\ z&=P_1n_1+P_2p_2+P_3((1+r)n_3+5n_4)+P_4p_1\\
\text{s.t.}\quad &x_1+x_2+n_1-p_1=100\\
&x_1+x_2+n_2-p_2=90\\
&x_1+n_3-p_3=80
\end{aligned}$$

$$x_2 + n_4 - p_4 = 55$$
$$x_1, x_2, n_i, p_i \geqslant 0, i = 1,2,3,4$$

5. 求解

$$
\begin{aligned}
\min z = & P_1(p_1 + p_2) + P_2(n_3 + 2n_4) + P_3 n_1 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + n_1 - p_1 = 20 \\
& x_2 + n_2 - p_2 = 35 \\
& -5x_1 + 3x_2 + n_3 - p_3 = 200 \\
& x_1 - x_2 + n_4 - p_4 = 60 \\
& x_1, x_2, n_i, p_i \geqslant 0, i = 1,2,3,4
\end{aligned}
$$

在本题中

(a)若增加一约束条件：$x_1 + x_2 + n_5 - p_5 = 50$，目标函数 $P_2(n_3 + 2n_4)$ 改为 $P_2(n_3 + 2n_4 + 2p_5)$，求问题的解。

(b)若增加一变量 x_3，约束：

$$
\begin{aligned}
& x_1 + x_3 + n_1 - p_1 = 20 \\
& x_2 + n_2 - p_2 = 35 \\
& -5x_1 + 3x_2 - x_3 + n_3 - p_3 = 200 \\
& x_1 - x_2 + n_4 - p_4 = 60 \\
& x_1, x_2, x_3, n_i, p_i \geqslant 0, i = 1,2,3,4
\end{aligned}
$$

求问题的解。

8 动态规划

动态规划是解决多阶段决策过程最优化问题的一种方法。1951 年，美国数学家贝尔曼(R. Bellman)提出了解决这类问题的“最优化原理”，1957 年发表了他的名著《动态规划》，该书是动态规划方面的第一本著作。

动态规划问世以来，在工农业生产、经济、军事、工程技术等许多方面都得到了广泛的应用，取得了显著的效果。它可以用来解决诸如最短路径问题、资源分配问题、生产调度问题、库存问题、排序问题、设备更新问题、生产过程最优控制问题等等。动态规划具有与线性规划、非线性规划完全不同的独特思路和方法，因此它能处理许多用其他数学规划不能奏效的问题，特别是离散性问题。

决策过程根据时间参量是连续的还是离散的，可以分为连续决策过程和离散(又称多阶段)决策过程。根据过程的演变是确定性的还是随机性的，可以分为确定性决策过程和随机性决策过程。这样，组合起来就有：连续确定性、连续随机性、离散确定性、离散随机性四种基本的决策过程。因为动态规划方法在解决多阶段决策过程最优化问题方面独具优势，且确定性决策过程又是经常遇到的、最基本的一种类型，所以下边重点介绍离散确定性决策过程。

8.1 多阶段决策过程最优化问题举例

在这里，以最短路径问题为例。

8.1.1 最短路径问题

【例 8.1】 如图 8.1，给定一个运输网络，两点之间连线上的数字表示两点间的距离。试求一条从 A 到 E 点的运输线路，使总距离为最短。

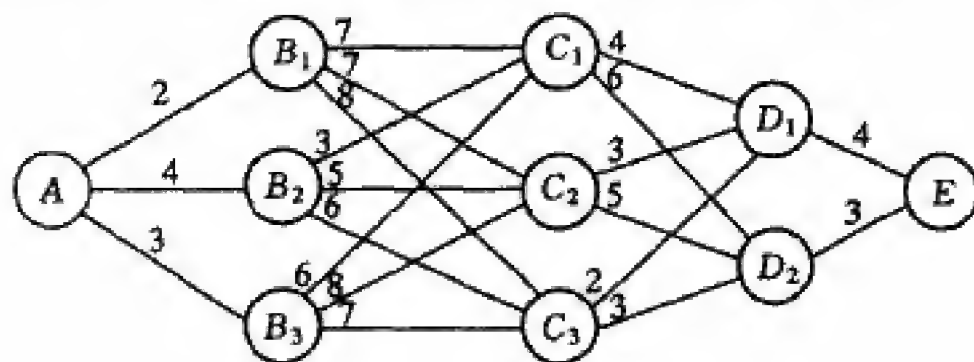


图 8.1

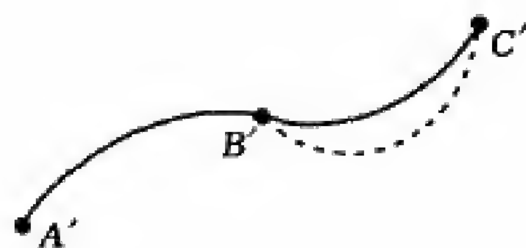


图 8.2

从图 8.1 可以看出，在始点 A 和终点 E 之间，有一些“中间站”，可把从 A 到 E 的全过程分成若干个阶段，这里可分为四个阶段。处于每个阶段时，都要选择走哪条支路——决策，一个阶段的决策除了影响该阶段的效果之外，还影响到下一阶段的初始状态，从而也就影响到整个过程以后的进程。因此，在进行某一阶段的决策时，就不能只从这一阶段本身考虑，而要把它看成是整个决策过程中的一个环节，我们的目的是为了求得整个过程的效果最优，即从 A 到 E 的总距离最短。

最短路径问题具有如下重要性质：若已经给定从点 A' 到点 C' 的最短路径如图 8.2 中实线所示，则从其上任一中间点 B' 到点 C' 的部分路径也必然是从 B' 到 C' 的所有可能选择路径中的最短路径。该性质极易用反证法加以证明。因为如果不是这样，则从点 B' 到点 C' 必然有另一条距离更短的路径（如图中虚线所示）存在，把它和原来最短路径上由点 A' 到点 B' 的那部分连接起来，就会得到一条由点 A' 到点 C' 的新路径，它比原来那条最短路径的总距离还要短，这与给定的前提条件相矛盾，所以是不可能的。

根据最短路径问题的这一重要性质，可以从最后一个阶段开始，由终点向始点方向逐阶段递推，寻找各点到终点的最短路径，当递推到始点时，即得到了从始点到终点的全过程最短路径。这种由后向前逆序递推的方法，正是动态规划通常采用的寻优途径。

8.1.2 逆序递推

下面，来求解图 8.1 所示的例题。把从 A 到 E 的全过程分为四个阶段，用 k 表示阶段变量，见图 8.3。第 1 阶段，有一个初始状态 A，三条可供选择的支路 AB_1, AB_2, AB_3；第 2 阶段，有三个初始状态 B_1, B_2, B_3，它们各有三条可供选择的支路……下面，我们用 $d_k(x_k, x_{k+1})$ 表示在第 k 阶段内由初始状态 x_k 到下阶段初始状态 x_{k+1} 的支路距离。例如，$d_3(C_2, D_1)$ 表示第 3 阶段内由 C_2 到 D_1 的距离，即 $d_3(C_2, D_1)=3$。还用 $f_k(x_k)$ 表示从第 k 阶段的 x_k 到终点 E 的最短距离，例如 $f_2(B_1)$ 表示从第 2 阶段的 B_1 到终点 E 的最短距离。

图 8.3 中，过程的始点是 A，终点是 E，过程的实际行进方向是由 A 经第 1, 2, 3, 4 阶段到达终点 E。所谓逆序递推，就是逆着过程的行进方向，由终点到始点，一个阶段一个阶段地递推。

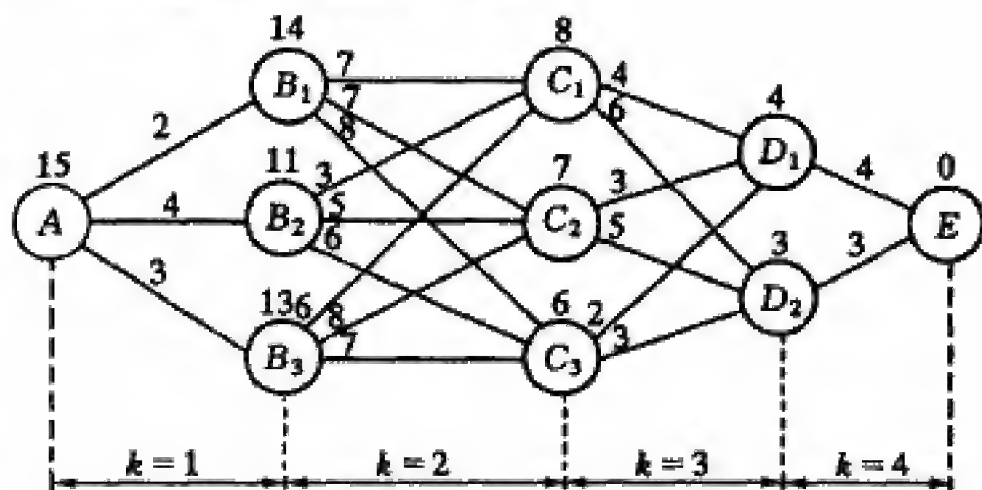


图 8.3

(1) 阶段 $k=4$

第 4 阶段有两个初始状态 D_1 和 D_2。那么，从 $A \to E$ 的全过程最短路径，在第 4 阶段究竟经过 D_1, D_2 中的哪一个呢？目前，还不得而知，因此只能各种可能都考虑：若全过程最短路径经过 D_1，则有 $f_4(D_1)=4$；若全过程最短路径经过 D_2，则有 $f_4(D_2)=3$。

(2) 阶段 $k=3$

假设全过程短路径在第 3 阶段经过 C_1 点：

若由 $C_1 \to D_1 \to E$，则有 $d_3(C_1, D_1)+f_4(D_1)=4+4=8$

若由 $C_1 \to D_2 \to E$，则有 $d_3(C_1, D_2)+f_4(D_2)=6+3=9$

因此，$f_3(C_1)=\min(8,9)=8$，即由 $C_1 \to E$ 的最短路径是由 $C_1 \to D_1 \to E$，最短距离是 8。

类似地，假设全过程最短路径在第 3 阶段经过 C_2 点，则有

$$f_3(C_2)=\min\{[d_3(C_2, D_1)+f_4(D_1)], [d_3(C_2, D_2)+f_4(D_2)]\}=\min(7,8)=7$$

即由 $C_2 \to E$ 的最短路径是由 $C_2 \to D_1 \to E$，最短距离是 7。

假设全过程最短路径在第 3 阶段经过点 C_3，则有

$$f_3(C_3)=\min\{[d_3(C_3, D_1)+f_4(D_1)], [d_3(C_3D_2)+f_4(D_2)]\}=\min(6,6)=6$$

即由 $C_3 \to E$ 的最短路径有两条：$C_3 \to D_1 \to E$ 和 $C_3 \to D_2 \to E$，其最短距离是 6。

(3) 阶段 $k=2$

类似地，可计算 $f_2(B_1)$，$f_2(B_2)$，$f_2(B_3)$如下：

$$f_2(B_1)=\min\{[d_2(B_1,C_1)+f_3(C_1)],[d_2(B_1,C_2)+f_3(C_2)],[d_2(B_1,C_3)+f_3(C_3)]\}$$
$$=\min(15,14,14)=14$$
$$f_2(B_2)=\min\{[d_2(B_2,C_1)+f_3(C_1)],[d_2(B_2,C_2)+f_3(C_2)],[d_2(B_2,C_3)+f_3(C_3)]\}$$
$$=\min(11,12,12)=11$$
$$f_2(B_3)=\min\{[d_2(B_3,C_1)+f_3(C_1)],[d_2(B_3,C_2)+f_3(C_2)],[d_2(B_3,C_3)+f_3(C_3)]\}$$
$$=\min(14,15,13)=13$$

因此，由 $B_1\to E$ 的最短路径有三条：$B_1\to C_2\to D_1\to E$，$B_1\to C_3\to D_1\to E$ 和 $B_1\to C_3\to D_2\to E$，最短距离都是 14；由 $B_2\to E$ 的最短路径是 $B_2\to C_1\to D_1\to E$，最短距离是 11；由 $B_3\to E$ 的最短路径有两条：$B_3\to C_3\to D_1\to E$ 和 $B_3\to C_3\to D_2\to E$，最短距离都是 13。

(4) 阶段 $k=1$

计算 $f_1(A)$如下：

$$f_1(A)=\min\{[d_1(A_1,B_1)+f_2(B_1)],[d_1(A,B_2)+f_2(B_2)],[d_1(A,B_3)+f_2(B_3)]\}$$
$$=\min(16,15,17)=15$$

因此，由 $A\to E$ 的全过程最短路径是 $A\to B_2\to C_1\to D_1\to E$，最短距离是 15。

从以上过程可以看出，每个阶段中，都求出本阶段的各个初始状态到过程终点 E 的最短路径和最短距离，当逆序递推到过程始点 A 时，便得到全过程的最短路径及其最短距离，同时附带得到一族最优结果(即各阶段的各状态到终点 E 的优结果)。和穷举法相比，逆序递推方法大大减少了计算量，且大大丰富了计算结果。离散动态规划是一种隐式枚举。

8.1.3 顺序递推

顺序递推是与逆序递推相对而言的。下面，用顺序递推来求解图 8.1 所示例题。所谓顺序递推，就是顺着过程的实际行进方向从始点 A 到终点 E 逐阶段递推，在这里，假设阶段的划分与逆序递推时相同。需要注意的是，在顺序递推中，求出的是始点 A 到各状态节点的最短路径及其最短距离值。顺序递推的求解参见图 8.4。

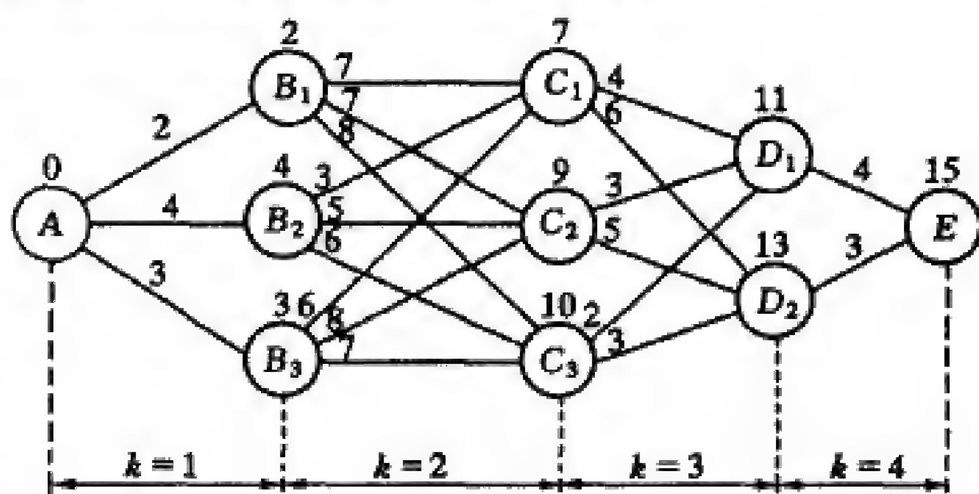


图 8.4

(1) 阶段 $k=1$

第 1 阶段有三个末端状态 B_1,B_2,B_3，如果由 $A\to E$ 的全过程最短路径在第 1 阶段经过 B_1，则有 $f_1(B_1)=2$，类似地，有 $f_1(B_2)=4$，$f_1(B_3)=3$。

(2) 阶段 $k=2$

第 2 阶段有三个末端状态 C_1,C_2,C_3，它们各有三条可供选择的支路。计算如下：

$$f_2(C_1)=\min\{[d_2(C_1,B_1)+f_1(B_1)],[d_2(C_1,B_2)+f_1(B_2)],[d_2(C_1,B_1)+f_1(B_3)]\}$$
$$=\min(9,7,9)=7$$
$$f_2(C_2)=\min\{[d_2(C_2,B_1)+f_1(B_1)],[d_2(C_2,B_2)+f_1(B_2)],[d_2(C_2,B_3)+f_1(B_3)]\}$$
$$=\min(9,9,11)=9$$

$$f_2(C_3)=\min\{[d_2(C_3,B_1)+f_1(B_1)],[d_2(C_3,B_2)+f_1(B_2)],[d_2(C_3,B_3)+f_1(B_3)]\}$$
$$=\min(10,10,10)=10$$

$f_2(C_1)$相应的最短路径是 $A\to B_2\to C_1$；$f_2(C_2)$相应的最短路径有两条：$A\to B_1\to C_2$ 和 $A\to B_2\to C_2$；$f_2(C_3)$相应的最短路径有三条：$A\to B_1\to C_3$，$A\to B_2\to C_3$ 和 $A\to B_3\to C_3$

(3) 阶段 $k=3$

类似地，可计算 $f_3(D_1)$，$f_3(D_2)$如下：

$$f_3(D_1)=\min\{[d_3(D_1,C_1)+f_2(C_1)],[d_3(D_1,C_2)+f_2(C_2)],[d_3(D_1,C_3)+f_2(C_3)]\}$$
$$=\min(11,12,12)=11$$
$$f_3(D_2)=\min\{[d_3(D_2,C_1)+f_2(C_1)],[d_3(D_2,C_2)+f_2(C_2)],[d_3(D_2,C_3)+f_2(C_3)]\}$$
$$=\min(13,14,13)=13$$

$f_3(D_1)$相应的最短路径是 $A\to B_2\to C_1\to D_1$，$f_3(D_2)$相应的最短路径 $A\to B_2\to C_1\to D_2$，和 $A\to B_2\to C_3\to D_2$。

(4) 阶段 $k=4$

计算 $f_4(E)$如下：

$$f_4(E)=\min\{[d_4(E,D_1)+f_3(D_1)],[d_4(E,D_2)+f_3(D_2)]\}$$
$$=\min(15,16)=15$$

因此，由 $A\to E$ 的全过程最短路径是$A\to B_2\to C_1\to D_1\to E$，相应的最短距离是 15，这与逆序递推求出的最优结果完全相同。从始点 A 到各个状态节点的最短距离值标在图 8.4 上。

8.2 动态规划的基本概念和模型的构成

8.2.1 动态规划的基本概念

这里仍以 8.1 节中的例题为例加以介绍。

(1) 阶 段

用动态规划方法求解问题时，需要将问题的全过程恰当地分为若干个相互联系的阶段，以便按一定的次序去求解。描述阶段的变量称为阶段变量，通常用 k 表示，阶段一般是根据时间和空间的自然特征来划分，阶段的划分要便于把问题转化为多阶段决策的过程。如上述例题可分为 4 个阶段，即 $k=1,2,3,4$，见图 8.3。

从过程始点到过程终点的整个过程称为全过程，从第 k 阶段始点到过程终点的过程，称为后部子过程，或称为 k 子过程。

(2) 状 态

状态表示每个阶段开始时所处的自然状况或客观条件，它描述了过程的状况。在例题中，状态就是各阶段的起始位置，它既是该阶段某支路的始点，又是前一阶段支路的终点。通常一个阶段有若干个状态，例题中，第 1 阶段有一个状态 A，第 2 阶段有三个状态，即点 B_1，B_2，B_3。

描述过程状态的变量称为状态变量，它可用一个数、一组数或一向量（n 维情况）来描述。我们用 x_k 表示第 k 阶段的状态变量。例题中，第 3 阶段有三个状态，即状态变量可取 3 个值：C_1, C_2, C_3。第 k 阶段所有状态的集合，称为第 k 阶段可达状态的集合，一般记为 x_k，例题中，$X_3 = \{C_1, C_2, C_3\}$。

（3）决　策

当过程处于某个阶段的某个状态时，从该状态演变到下一阶段某状态的选择，称为决策，决策是在某一阶段内的抉择。描述决策的变量，称为决策变量，通常用 $u_k(x_k)$ 表示第 k 阶段处于 x_k 状态时的决策变量，它等于所到达的下一阶段的状态。例题中，有 $u_2(B_1) = C_2$，它表示第 2 阶段处于 B_1 时选择了由 B_1 到 C_2 的决策。第 k 阶段 x_k 状态下决策变量的所有可能取值（取值范围），称为第 k 阶段 x_k 状态下的允许决策的集合，用 $U_k(x_k)$ 表示，例题中，有 $U_2(B_1) = \{C_1, C_2, C_3\}$。

（4）策　略

由所有各阶段的决策组成的决策函数序列称为全过程策略，简称策略，记作 $P_{1,n}(x_1)$。可供选择的所有全过程策略构成允许策略集合，即策略的取值范围，用 $P_{1,n}(x_1)$ 表示。能够达到总体最优的全过程策略称为最优策略。相应于后部子过程的决策函数序列，称为子策略，记作 $P_{k,n}(x_k)$。

（5）指标函数

任何决策过程都必须有一个度量其策略好坏的尺度，它是定义在全过程或后部子过程上的一种数量函数，称为指标函数。定义在全过程上的指标函数，即相当于静态规划中的目标函数。指标函数记作 $V_{1,n}(x_1; p_{1,n})$ 或 $V_{k,n}(x_k; p_{k,n})$，有时也简写为 $V_{1,n}$ 或 $V_{k,n}$。$V_{k,n}$ 指的是从第 k 阶段的始点到第 n 阶段的终点即过程终点的指标函数。

指标函数的最优值称为最优指标函数，记作 $f_1(x_1)$ 或 $f_k(x_k)$。

指标函数在第 k 阶段一个阶段内的数值，称为第 k 阶段的指标函数，记作 $v_k(x_k, u_k)$，在例题中，它就是某一支路的距离值，如 $v_3(C_1, D_2) = d_3(C_1, D_2) = 6$。

8.2.2　动态规划模型的构成

构成动态规划模型，需进行以下几方面的工作：

（1）正确选择阶段变量 k。

（2）正确选择状态变量 x_k。

状态变量的选择要能满足下面两个条件：

① 要能正确描述受控过程的演变特性。

② 要满足无后效性。

所谓无后效性，是指这样一个重要性质：某阶段的状态一旦确定，则此后过程的演变不再受此前各状态及决策的影响。也就是说，“未来与过去无关”，当前的状态是此前历史的一个完整的总结，此前的历史只能通过当前的状态去影响过程未来的演变。即由第 k 阶段的状态出发的后部子过程，可以看作是一个以 x_k 为初始状态的独立过程。

（3）正确选择决策变量 u_k。

（4）列出状态转移方程

$$x_{k+1} = T_k(x_k, u_k) \tag{8.2.1}$$

这里函数关系 T_k 因问题的不同而不同。

从状态转移方程的一般形式可以看出，未来的状态 x_{k+1}仅由 x_k, u_k 来确定，而与 x_k 以前的各状态、决策无关，这也体现了无后效性。

(5) 列出指标函数 $V_{k,n}$，它要具有按阶段可分性，并满足递推关系

$$\begin{aligned} V_{k,n} &= V_{k,n}(x_k, p_{k,n}) \\ &= \sum_{j=k}^{n} v_j(x_j, u_j) \\ &= v_k(x_k, u_k) + V_{k+1,n}(x_{k+1}, p_{k+1,n}) \end{aligned}$$

在构成动态规划的模型时，状态变量的无后效性常常是不容易被满足的。

8.3 基本原理和基本方程

8.3.1 最优性定理

最优性定理是策略最优性的充分必要条件，它是动态规划的理论基础。其内容如下：

设有一多阶段决策过程，阶段变量 $k=1,2,\cdots,n$。允许策略 $p_{1,n}^*=(u_1^*, u_2^*, \cdots, u_n^*)$是最优策略的充要条件是：对任一个 $k(1<k<n)$，当初始状态为 x_1 时，有

$$V_{1,n}(x_1;p_{1,n}^*)=\min_{P_{1,k-1}(x_j)}\{V_{1,k-1}(x_1;p_{1,k-1})+\min_{P_{k,n}(\bar{x}_k)} V_{k,n}(\bar{x}_k;p_{k,n})\} \qquad (8.3.1)$$

式中 $p_{1,n}=(p_{1,k-1};p_{k,n})$，$\bar{x}_k=T_{k-1}(x_{k-1}, u_{k-1})$，$\bar{x}_k$ 是由给定的初始状态x_1 和子策略 $p_{1,k-1}$所确定的第 k 阶段的状态。

证明：先证必要性。即如果 $p_{1,n}^*$是最优策略，则必有(8.3.1)式成立。

设 $p_{1,n}^*$是最优策略，则有

$$\begin{aligned} V_{1,n}(x_1;p_{1,n}^*) &= \min_{P_{1,n}} V_{1,n}(x_1;p_{1,n}) \\ &= \min_{P_{1,n}}[V_{1,k-1}(x_1;p_{1,k-1})+V_{k,n}(\bar{x}_k;p_{k,n})] \end{aligned}$$

对于从 k 至 n 阶段的后部子过程而言，它的指标函数取决于该子过程的初始状态 $\bar{x}_k$ 和子策略 $p_{k,n}$，而 $\bar{x}_k$ 是由 x_1 及子策略 $p_{1,k-1}$确定的。

因此，在策略集合 $P_{1,n}$上求最优解，就等价于先在子策略集合 $P_{k,n}(\bar{x}_k)$上求子最优解，然后再求这些子最优解在子策略集合 $P_{1,k-1}(x_1)$上的最优解。故上式可写为

$$V_{1,n}(x_1;p_{1,n}^*)=\min_{P_{1,k-1}(x_1)}\{\min_{P_{k,n}(\bar{x}_k)}[V_{1,k-1}(x_1,;p_{1,k-1})+V_{k,n}(\bar{x}_k;p_{k,n})]\}$$

但中括号内第一项与子策略 $p_{k,n}$无关，故得

$$V_{1,n}(x_1;p_{1,n}^*)=\min_{P_{1,k-1}(x_1)}\{V_{1,k-1}(x_1;p_{1,k-1})\}+\min_{P_{k,n}(\bar{x}_k)}\{V_{k,n}(\bar{x}_k,;p_{k,n})\}$$

再证充分性。即如果允许策略 $p_{1,n}^*$使得式(8.3.1)成立，则 $p_{1,n}^*$必为最优策略。

设 $p_{1,n}=(p_{1,k-1}, p_{k,n})$为任一策略，$\bar{x}_k$ 为x_1 及 $p_{1,k-1}$所确定的第 k 阶段的初始状态，则有

$$V_{k,n}(\bar{x}_k;p_{k,n})\geqslant\min_{P_{k,n}(\bar{x}_k)} V_{k,n}(\bar{x}_k;p_{k,n})$$

又因为

$$\begin{aligned}V_{1,n}(x_1;p_{1,n}) &= V_{1,k-1}(x_1;p_{1,k-1}) + V_{k,n}(\bar{x}_k;p_{k,n}) \\ &\geqslant V_{1,k-1}(x_1;p_{1,k-1}) + \min_{P_{k,n}(\bar{x}_k)} V_{k,n}(\bar{x}_k;p_{k,n}) \\ &\geqslant \min_{P_{1,k-1}(x_1)} \{V_{1,k-1}(x_1;p_{1,k-1}) + \min_{P_{k,n}(\bar{x}_k)} V_{k,n}(\bar{x}_k;p_{k,n})\} \\ &= V_{1,n}(x_1;p_{1,n}^*)\end{aligned}$$

即允许策略 $p_{1,n}^*$使(8.3.1)式成立。也就是说,对任一策略 $p_{1,n}$都有

$$V_{1,n}(x_1;p_{1,n}) \geqslant V_{1,n}(x_1;p_{1,n}^*)$$

因此 $p_{1,n}^*$是最优策略。

若问题为求 max,则把上述各“≥”不等号换成“≤”不等号即可。

8.3.2 最优化原理

20 世纪 50 年代,R.Bellman 根据研究一类多阶段决策问题,首先提出了著名的最优化原理:“作为整个过程的最优策略具有这样的性质:不管该最优策略上某状态以前的状态和决策如何,对该状态而言,余下的诸决策必定构成最优子策略。”即最优策略的任一后部子策略都是最优的。

其实,上述最优化原理仅仅是最优策略的必要条件,是最优性定理的一个推论,该推论的内容如下:

当初始状态为 x_1 时,若允许策略 $p_{1,n}^*$是最优策略,则对任意阶段 $k(1<k<n)$,它的子策略 $p_{k,n}^*$对于以 $x_k^* = T_{k-1}(x_{k-1}^*, u_{k-1}^*)$为始点的后部子过程而言,必是最优的(注意:$x_k^*$ 是由 x_1 和 $p_{1,k-1}^*$确定的)。

上述推论用反证法很容易得以证明,此处从略。

8.3.3 基本方程

动态规划中,有逆序递推和顺序递推两种方法。在这两种不同的递推方法中,阶段变量 k 的定义是相同的,且一般都定义第 1 阶段的初始状态为 x_1,第 1 阶段的终止状态即第 2 阶段的初始状态为 $x_2,\cdots$,定义全过程的终点即第 n 阶段的终止状态为 x_{n+1}。

逆序递推和顺序递推各有相应的基本方程,下面将分别加以介绍。

(1) 逆序递推的基本方程

这里先介绍动态规划逆序递推的基本方程,假设问题为求 min。

因为

$$\begin{aligned}f_k(x_k) &= \min_{P_{k,n}} V_{k,n}(x_k;p_{k,n}) \\ &= \min_{P_{k,n}}[v_k(x_k,u_k) + V_{k+1,n}(x_{k+1};p_{k+1,n})] \\ &= \min_{U_k}[v_k(x_k,u_k) + \min_{P_{k+1,n}} V_{k+1,n}(x_{k+1};p_{k+1,n})] \\ &= \min_{U_k}[v_k(x_k,u_k) + f_{k+1}(x_{k+1})]\end{aligned}$$

所以有基本方程如下:

$$\begin{cases} f_k(x_k) = \min\limits_{U_k}[v_k(x_k,u_k) + f_{k+1}(x_{k+1})] \quad k = n, n-1, \cdots, 2, 1 \\ \text{终端条件}: f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 \end{cases} \tag{8.3.2}$$

式中 $x_{k+1}=T_k(x_k,u_k)$。

在应用基本方程求解动态规划问题时，一般都是根据终端条件，从 $k=n$ 开始，由终点向始点逐阶段逆序递推，当最后求出 $f_1(x_1)$时，即得到整个问题的最优解。

逆序递推时，常采用图 8.5 来形象地表示各阶段、各变量之间的关系。图中，第 k 阶段的输出 $f_k(x_k)$是逆序递推过程中第 k 阶段计算出的最优指标函数值，其计算式见基本方程。

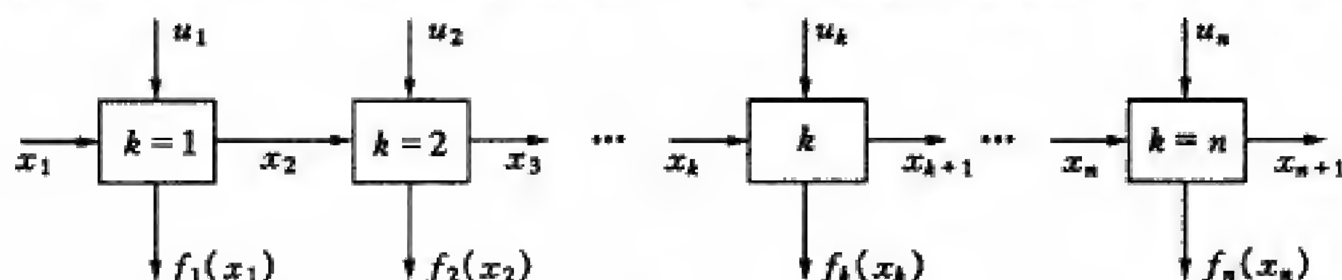


图 8.5

逆序递推中，第 k 阶段的状态变量一般选择第 k 阶段初的状态，状态转移方程为 $x_{k+1}=T_k(x_k,u_k)$，也就是说，决策变量 u_k 使得状态由 x_k 演变到 x_{k+1}。图 8.5 中的指标函数 $f_k(x_k)$是后部子过程上的最优指标函数，它是相对于过程终点而言的。

一般地说，当过程始点给定时，用逆序递推比较方便。

(2) 顺序递推的基本方程

在顺序递推时，常采用图 8.6 来形象地表示各阶段、各变量之间的关系。图中，第 k 阶段的输出 $f_k(x_{k+1})$是顺序递推过程中第 k 阶段计算出的最优指标函数值，其计算式见基本方程。

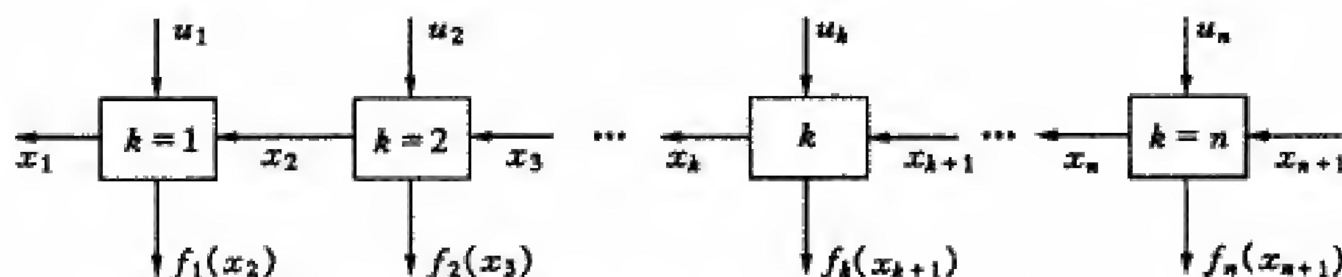


图 8.6

顺序递推中，第 k 阶段的状态变量一般选择第 k 阶段末即第 $k+1$ 阶段初的状态，状态转移方程为 $x_k=T_k'(x_{k+1},u_k)$，也就是说，决策变量 u_k 使得状态由 x_{k+1}演变到 x_k，这里的函数关系 T_k'是(8.2.1)中 T_k 的逆变换。图 8.6 中的指标函数 $f_k(x_{k+1})$是相对于过程始点的最优指标函数。

动态规划顺序递推的基本方程如下：

$$\begin{cases} f_k(x_{k+1})=\min\limits_{U_k}[v_k(x_{k+1},u_k)+f_{k-1}(x_k)] \quad k=1,2,\cdots,n \\ \text{始端条件：} f_0(x_1)=0 \end{cases} \tag{8.3.3}$$

一般地说，当过程终点给定时，用顺序递推比较方便。

对于一个给定的问题，如果有一个固定的过程始点和一个固定的过程终点，则顺序递推和逆序递推会得到相同的最优结果。如果给定的问题，既未指定过程始点，又未指定过程终点，但却给定了始点的指标函数和终点的指标函数，则顺序递推和逆序递推也会得到相同的最优结果、相同的过程始点以及相同的过程终点。

8.4 确定性决策过程

在这一节里，结合几个应用实例，先学习确定性定期决策过程，再学习确定性不定期决策过程。所谓“定期”，即过程的总阶段数在求解前已经确定；而“不定期”，其过程的最优阶段数需求解结束时才能确定。

8.4.1 资源分配问题

所谓资源分配问题，就是将数量一定的资源(例如原材料、资金、机器设备、劳动力、食品等)恰当地分配给若干个使用者，而使总的目标函数值为最优。

资源分配问题，属于线性规划、非线性规划这样一类静态规划问题，它通常是与时间无关的，而动态规划所研究的问题是与时间有关的，但是，这类静态问题，可以人为地引入时间因素，把它看作是按阶段进行的一个多阶段决策问题，这就使得动态规划成为求解这类线性规划、非线性规划的有效方法。

下面用动态规划方法来求解一种资源的分配问题，即一维资源分配问题。

(1) 问题举例

【例 8.2】 现有某种设备共四台，拟分给用户 1，用户 2，用户 3 等三个工厂，各工厂利用这些设备为国家提供的盈利 $g_k(u_k)$各不相同(见表 8.1)。

问：应如何分配这四台设备，使国家总盈利为最大？

若用静态规划的方法求解此问题，需要列出它的静态规划模型。

设分给用户 1，用户 2，用户 3 的设备数分别为 u_1, u_2, u_3 台，则有

$$\max z = g_1(u_1) + g_2(u_2) + g_3(u_3)$$

$$u_1 + u_2 + u_3 = 4$$

$$u_k \geqslant 0 \text{ 且为整数}(k = 1, 2, 3)$$

其中 $g_1(u_1), g_2(u_2), g_3(u_3)$分别是三个用户的盈利函数，见表 8.1。

上述静态规划模型，属于整数非线性规划问题。一般而言，整数非线性规划问题，若用静态规划方法求解，非常困难，甚至不可能；而采用动态规划方法，则能够有效地解决问题。下面，就介绍这种动态规划方法。

表 8.1

盈利 $g_k(u_k)$ \ 用户 k \ 设备台数 u_k	$k=1$	$k=2$	$k=3$
0	0	0	0
1	4	2	3
2	6	5	5
3	7	6	7
4	7	8	8

(2)构造动态规划模型

① 阶段变量 k

对于这种非时序的静态问题,如何划分阶段呢?这是本问题区别于一般动态问题的特点。

划分阶段的原则是:若有 N 个用户,就把问题分成 N 个阶段。现在,$N=3$,把问题分成三个阶段:

$k=3$ 时,把第 3 阶段初分配者手中拥有的设备全部分给用户 3(这种情况相当于单一用户的问题)。

$k=2$ 时,把第 2 阶段初分配者手中拥有的设备全部分给用户 2 和用户 3(这种情况相当于两个用户的分配问题)。

$k=1$ 时,把第 1 阶段初分配者手中拥有的总共四台设备全部分给用户 1,用户 2 和用户 3(这种情况相当于三个用户的分配问题)。

从以上可以看出,第 k 阶段,就是把第 k 阶段初分配者手中拥有的设备全部分给从用户 k 至用户 N。

② 状态变量 x_k

选择第 k 阶段初分配者手中拥有的设备总数为 x_k。由题意知 $x_1=4$, $x_4=0$。

③ 决策变量 u_k

第 k 阶段时,总数为 x_k 的设备要分给用户 k 到用户 N,把其中分给用户 k 的设备数选为 u_k。

④ 状态转移方程

状态转移方程为:

$$x_{k+1}=x_k-u_k$$

⑤ 阶段指标 v_k

令第 k 阶段指标为:用户 k 利用所分到的资源 u_k 产生的盈利,即

$$v_k(x_k,u_k)=g_k(u_k)$$

(3) 建立基本方程

令最优值函数 $f_k(x_k)$ 为将资源 x_k 分配给用户 k 至用户 N 所能获得的最大盈利,有基本方程:

$$\begin{cases} f_k(x_k)=\max\limits_{0\leqslant u_k\leqslant x_k}[v_k(x_k,u_k)+f_{k+1}(x_{k+1})] \\ \qquad\quad =\max\limits_{0\leqslant u_k\leqslant x_k}[g_k(u_k)+f_{k+1}(x_{k+1})] \quad (k=N,N-1,\cdots,1) \\ f_{N+1}(x_{N+1})=0 \end{cases}$$

在上述例题中,$N=3$。

(4) 逆序递推计算

① $k=3$ 时

a. 确定状态变量 x_3 的取值范围

$$x_3=0,1,2,3,4$$

b. 对 x_3 的每个确定取值,分别求出决策变量 u_3 的取值范围。

因为 $u_3=x_3$,故有

当 $x_3=0$ 时,$u_3=0$

当 $x_3=1$ 时，$u_3=1$

当 $x_3=2$ 时，$u_3=2$

当 $x_3=3$ 时，$u_3=3$

当 $x_3=4$ 时，$u_3=4$

基本方程：

$$f_3(x_3)=\max_{0\leqslant u_3\leqslant x_3}[v_3(x_3,u_3)+f_4(x_4)]$$
$$=\max_{0\leqslant u_3\leqslant x_3}[v_3(x_3,u_3)]$$
$$=v_3(x_3,u_3)$$
$$=g_3(u_3)$$

状态转移方程： $x_4=x_3-u_3=0$

计算结果列于表 8.2 中。

表 8.2 $k=3$

x_k	u_k	x_{k+1}	v_k	$f_{k+1}(x_{k+1})$	$v_k+f_{k+1}(x_{k+1})$
0	0	0	0	0	$0=f_3(0)$
1^*	1^*	0^*	3	0	$3^*=f_3(1)$
2	2	0	5	0	$5=f_2(2)$
3	3	0	7	0	$7=f_3(3)$
4	4	0	8	0	$8=f_3(4)$

② $k=2$ 时

a. 确定状态变量 x_2 的取值范围

$$x_2=0,1,2,3,4$$

b. 对 x_2 的每个确定取值，分别求出决策变量 u_2 的取值范围

当 $x_2=0$ 时，$u_2=0$

当 $x_2=1$ 时，$u_2=0,1$

当 $x_2=2$ 时，$u_2=0,1,2$

当 $x_2=3$ 时，$u_2=0,1,2,3$

当 $x_2=4$ 时，$u_2=0,1,2,3,4$

基本方程：

$$f_2(x_2)=\max_{0\leqslant u_2\leqslant x_2}[v_2(x_2,u_2)+f_3(x_3)]$$
$$=\max_{0\leqslant u_2\leqslant x_2}[g_2(u_2)+f_3(x_3)]$$

状态转移方程：

$$x_3=x_2-u_2$$

计算结果列于表 8.3 中。

③ $k=1$ 时

a. 确定 x_1 的取值范围：

$$x_1=4$$

b. 确定 u_1 的取值范围：

$$u_1=0,1,2,3,4$$

基本方程：

$$f_1(x_1)=\max_{0\leqslant u_1\leqslant 4}[v_1(x_1,u_1)+f_2(x_2)]$$
$$=\max_{0\leqslant u_1\leqslant 4}[g_1(u_1)+f_2(x_2)]$$

状态转移方程：

$$x_2=x_1-u_1$$

计算结果列于表 8.4 中。

表 8.3 $k=2$

x_k	u_k	x_{k+1}	v_k	$f_{k+1}(x_{k+1})$	$v_k+f_{k+1}(x_{k+1})$
0	0	0	0	0	$0=f_2(0)$
1	0	1	0	3	$3=f_2(1)$
	1	0	2	0	2
	0	2	0	5	$5=$
2	1	1	2	3	$5=$ } $f_2(2)$
	2	0	5	0	$5=$
3^*	0	3	0	7	7
	1	2	2	5	7
	2^*	1^*	5	3	$8^*=f_2(3)$
	3	0	6	0	6
4	0	4	0	8	8
	1	3	2	7	9
	2	2	5	5	$10=f_2(4)$
	3	1	6	3	9
	4	0	8	0	8

表 8.4 $k=1$

x_k	u_k	x_{k+1}	v_k	$f_{k+1}(x_{k+1})$	$v_k+f_{k+1}(x_{k+1})$
4^*	0	4	0	10	10
	1^*	3^*	4	8	$12^*=f_1(4)$
	2	2	6	5	11
	3	1	7	3	10
	4	0	7	0	7

④ 求全过程最优指标函数与最优策略

由 $k=1$ 的表，可以求出全过程最优指标函数 $f_1(x_1)$；由 $k=1$ 至 $k=3$ 各表，可以依次求出第 1,2,3 各阶段的最优决策，进而得到最优策略。

由表 8.4($k=1$)可知，该分配问题可使国家得到的最大盈利为 12，第 1 阶段的最优决策 $u_1^*=1$，第 2 阶段初的最优状态为 $x_2^*=3$。

根据 $x_2^*=3$，查表 8.3 ($k=2$)可知，第 2 阶段的最优决策 $u_2^*=2$，第 3 阶段初的最优状态为 $x_3^*=1$。

根据 $x_3^*=1$，查表 8.2 ($k=3$)可知，第 3 阶段的最优决策 $u_3^*=1$，这样，四台设备刚好分配完。

综上所述，这四台设备的最优分配方案是：分配给用户 1 设备 1 台，可盈利 4；分配给用户 2 设备 2 台，可盈利 5；分配给用户 3 设备 1 台，可盈利 3。四台设备为国家提供的最大盈利为 12。

以上求解的一些问题，都是采用一个状态变量即可描述系统的状态，它们属于一维变量问题。下面再简要介绍一下多维变量问题。

8.4.2 多维变量问题

所谓多维，就是描述系统的状态需要两个或更多个状态变量。在每一阶段选择两个或更多个决策变量的情况，也属于多维问题。多维问题的复杂性以及数值的计算量、存储量都大大增加。

(1) 问题举例

【例 8.3】 载重车的运动

一辆载重车在无阻力的轨道上滑行，初始位置和初始速度为 X_0 和 $\dot{X}_0$，用加外力的方式控制它，使之在规定时间 T 停在原点，即 $X=\dot{X}_0=0$，费用与所加外力的平方成正比。

求出分阶段控制过程中，各阶段所加外力 F，使在满足上述条件下的费用最小。

在这个例子中，其状态必须用位置和速度两个状态变量来描述(二维)，若 k 阶段初的状态只用位置一个状态变量来描述，则不足以完全反映出此前的状态和决策的作用效果，即不能满足无后效性。

【例 8.4】 二维资源分配问题

现有设备 A 和设备 B 两种资源要分配给 N 个不同用户，这两种资源的总量分别为 a 台和 b 台，已知用户 $k(1\leqslant k\leqslant N)$利用数量为 u_{kA}的设备 A 和数量为 u_{kB}的设备 B 可以产生 $g_k(u_{kA},u_{kB})$的效益。问：应如何分配这两种资源，使 N 个用户所产生的总效益最大?

(2) 构造动态规划模型

① 阶段变量 k

二维资源分配问题划分阶段的方法与一维资源分配问题的相同。现有 N 个用户，就把问题分为 N 个阶段。第 k 阶段时，把第 k 阶段初分配者手中拥有的设备 A，设备 B 全部分给从用户 k 至用户 N。

② 状态变量——二维

选择第 k 阶段初分配者手中拥有的设备 A 的总数为 x_{kA}状态变量 1；

选择第 k 阶段初分配者手中拥有的设备 B 的总数为 x_{kB}状态变量 2。

③ 决策变量——二维

第 k 阶段时，选择分配给第 k 个用户的设备 A 的数量为 u_{kA}决策变量 1；

第 k 阶段时，选择分配给第 k 个用户的设备 B 的数量为 u_{kB}决策变量 2。

④ 状态转移方程——两个

$$x_{(k+1),A}=x_{kA}-u_{kA}$$

$$x_{(k+1),B}=x_{kB}-u_{kB}$$

⑤ 阶段指标函数

第 k 阶段指标函数：$v_k = g_k(u_{kA}, u_{kB})$，这是第 k 个用户利用所分到的资源 u_{kA}, u_{kB} 产生的效益。

(3) 建立基本方程

后部子过程上的最优指标函数 $f_k(x_{kA}, x_{kB})$ 是第 k 个用户至第 N 个用户利用资源 x_{kA}，x_{kB} 所产生的最大效益。

基本方程如下：

$$\begin{cases} f_k(x_{kA}, x_{kB}) = \max\limits_{u_{kA}, u_{kB}} [g_k(u_{kA}, u_{kB}) + f_{k+1}(x_{(k+1)A}, x_{(k+1)B}] \quad k = N, N-1, \cdots, 1 \\ f_{N+1}(0,0) = 0 \end{cases}$$

(4) 维数障碍

当利用基本方程进行逆序递推计算时，维数的增加，将带来计算量和存储量的急剧增加。上述例题中，如果状态变量 x_{kA}, x_{kB} 各有 10 种可能的取值，组合起来就有 10^2 个状态。对于每一个状态，如果决策变量 u_{kA}, u_{kB} 各有 10 种可能的取值，组合起来就有 10^2 种决策。这就是说，对于一个状态取值，要计算 10^2 个待比较的指标函数值，并将它们一一比较，从中挑选出最优值存储起来。而总共有 10^2 个状态取值，要计算 $10^2 \times 10^2$ 个待比较的指标函数值，要挑出 10^2 个最优值存储起来。

上面说的，只是一个阶段内的计算量与存储量，如果有 10 个阶段呢？如果状态变量、决策变量的离散精度更高呢？如果维数再大呢?!

从上述分析可知，当状态变量的维数增加时，计算量、存储量是呈指数形式增加的。因此，最优化原理直接用于解决多维问题时，粗略地说，将限于维数小于 6 的问题，否则，计算与存储的要求将会超过人们所能想象的最大和最快的计算机的可能。实际上，当状态变量的维数大于 2 或 3 时，采用通常的动态规划方法已经相当困难了，直接应用动态规划方法只限于维数相当低的问题。

(5) 多维问题的处理方法

这里，以前述二维资源分配问题为例，介绍两种最基本的处理多维问题的方法。

① 疏密格子点法

例中，状态变量 X 是二维的，即 $X = (x_A, x_B)^T$，故状态个数大大增加。因为 x_A, x_B 分别在区间 $[0, a]$ 和 $[0, b]$ 上变化，可分别将 $[0, a]$ 和 $[0, b]$ 划分成 m_1 和 m_2 等分，这样就得到 $(m_1+1)(m_2+1)$ 个格子点（如图 8.7），相应地也就有 $(m_1+1)(m_2+1)$ 个状态。

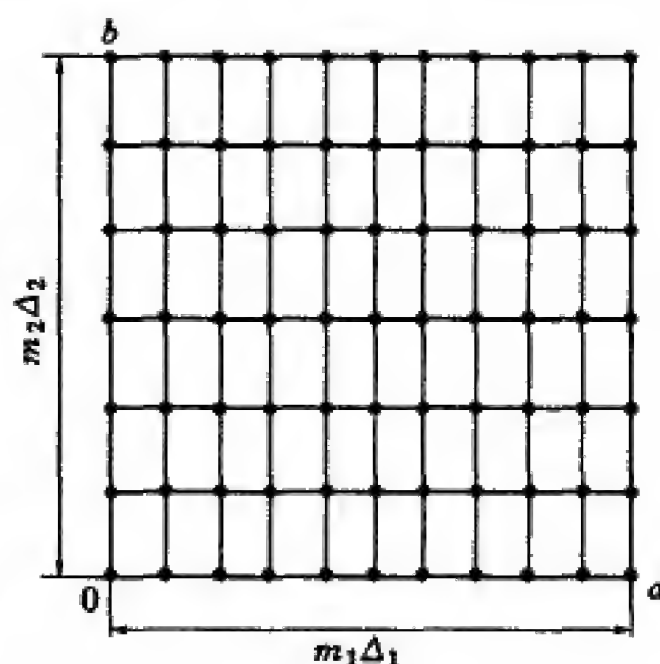


图 8.7

显然，随着状态变量维数的增加，状态个数急剧增加。为减少计算量和存储量，在开始时，可以采用较稀疏的格子点（即离散的精度比较低），并求出这时的最优解；然后，在这种“粗略”的最优解附近将格子点加密，以便能求出更精确的最优解。当然，这种方法也可能“漏掉”最优解，故应用此法时，要加强对指标函数特性的分析。

② 逐次逼近法

逐次逼近法是一种降低状态维数的近似法。它的基本思想类似于非线性规划中的变量轮

换法，其思路非常简单。

例中，要求分配两种资源：设备 A 和设备 B，状态变量是二维的。应用逐次逼近法时，首先对总数为 a 的设备 A 的分配，给定一组可行的分配值。这组分配值要满足：每个用户得到的设备 A 的数量是非负整数，且全部 N 个用户得到的设备 A 的总数恰为 a。将设备 A 的分配固定于这组可行的分配值(即暂时认为设备 A 的分配问题已经得到解决)，问题变为设备 B 一种资源的分配问题，利用前面介绍的方法即可求出其最优解。然后将设备 B 的分配固定于刚刚求出的最优解，再去求设备 A 的一维资源分配问题的最优解……如此轮换下去，可得一系列可行解。当达到精度要求时，即停止计算。

由以上分析可知，应用逐次逼近法，可以把 n 维状态变量问题转化为 n 个一维状态变量问题，通过多次迭代求得原问题的解。

值得指出的是，上述疏密格子点法和逐次逼近法与前面介绍的动态规划方法不同，它们有可能仅收敛到局部最优解。

8.4.3 不定期最短路径问题

(1) 问题举例

设总共有 N 个城市，c_{ij} 是任两城城 i 与城 j 间距离，有 $0 \leqslant c_{ij} \leqslant \infty$。求：各城市到第 N 城的最短路径和最短距离(不限定步数)。

图 8.8 是 $N=5$ 的一个例子。

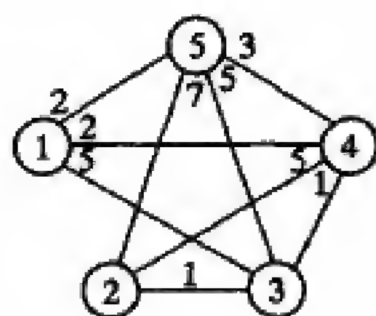


图 8.8

所谓“不定期”，就是最优的总阶段数事先不知，即从城 i 到城 N 的最短路径的总步数事先不知，但肯定不会超过 $N-1$ 步，因为若超过 $N-1$ 步，必然出现回路，不会是最短的，故有

$$1 \leqslant \text{最优总步数} \leqslant N-1$$

(2) 不定期的基本方程

设第 i 城到第 N 城的最短距离(不定期)为 $f(i)$，则 $f(i)$ 应满足下面的基本方程：

$$\begin{cases} f(i)=\min\limits_{j}[c_{ij}+f(j)] \quad i=1,2,\cdots,(N-1); j=1,2,\cdots,N \\ f(N)=0 \end{cases}$$

把上述不定期的基本方程与定期的基本方程加以比较，就可以知道：不定期的基本方程不是递推方程，而是 $f(i)$ 的函数方程。

在不定期的基本方程中，方程左、右两端都有未知的指标函数 $f(i)$ 或 $f(j)$，怎么求解呢？一般有两种方法：函数迭代法和策略迭代法，这两种迭代方法都是先给定一个初始的可行解，以便开始迭代，而每次迭代，结果都改善一些，只有到最后才得到最优结果。

(3) 函数迭代法

下面，用函数迭代法求解不定期的最短路径问题，以图 8.8 所示问题为例。

函数迭代法是由给定的各初始指标函数值开始，通过逐次迭代，求出各最优指标函数值。

① 给定可行的各初始指标函数值 $f_1(i)$，令 $k=1$。

令
$$f_1(i)=c_{i5} \quad (i=1,2,3,4)$$
$$f_1(5)=0$$

见表 8.5。

表 8.5

i	1	2	3	4	5
$f_1(i)$	2	7	5	3	0

这里的 $f_1(i)$ 给定为由第 i 城一步到达第 N 城的真实距离值，即初始解是"可行"的，"$f_1(i)$"的下标"1"表示迭代次数。当然，$f_1(i)$ 也可以按其他形式给定，但也要求是真实距离值。

② 由 $f_k(i) \to f_{k+1}(i)$。

迭代方程为：

$$\begin{cases} f_{k+1}(i) = \min\limits_{j=1,2,3,4,5}[c_{ij} + f_k(j)] \quad (i=1,2,3,4) \\ f_{k+1}(5) = 0 \end{cases}$$

迭代方程中，当 i 为某一确定值时，对各 j 寻优。$k=1$ 时的计算结果见表 8.6。

表 8.6

$c_{ij}+f_1(j)$ \ j / i	1	2	3	4	5	$f_2(i)$
1	0+2	∞+7	5+5	2+3	2+0*	2
2	∞+2	0+7	1+5*	5+3	7+0	6
3	5+2	1+7	0+5	1+3*	5+0	4
4	2+2	5+7	1+5	0+3	3+0*	3

③ 令 $k=k+1$，返回步骤 2 继续迭代。当迭代到 $f_k(i)=f_{k+1}(i)$ 时，即得最优结果。

由 $f_2(i) \to f_3(i)$ 继续迭代，结果见表 8.7。

表 8.7

i	$f_3(i)$	i	$f_3(i)$	i	$f_3(i)$	i	$f_3(i)$
1	2	2	5	3	4	4	3

由 $f_3(i) \to f_4(i)$ 继续迭代，结果见表 8.8。

表 8.8

$c_{ij}+f_3(j)$ \ j / i	1	2	3	4	5	$f_4(i)$
1	0+2	∞+5	5+4	2+3	2+0*	2
2	∞+2	0+5	1+4*	5+3	7+0	5
3	5+2	1+5	0+4	1+3*	5+0	4
4	2+2	5+5	1+4	0+3	3+0*	3

当迭代到 $f_k(i)=f_{k+1}(i)$ 时，即得最优指标函数 $f(i)$，同时确定了最优总步数及最优策略，停止迭代。

因为 $f_4(i)=f_3(i)$，故表 8.8 已是最优表，分析这张最优表，可得全部最优结果，见表 8.9。

表 8.9

i	$f(i)$	最优策略	最优步数
1	2	由①→⑤	1
2	5	由②→③→④→⑤	3
3	4	由③→④→⑤	2
4	3	由④→⑤	1

(4) 策略迭代法

下面,用策略迭代法求解不定期的最短路径问题,仍以图 8.8 所示问题为例。

策略迭代法是由给定的各初始策略开始,通过逐次迭代,求出各最优策略。

① 给定各初始决策 $u_1(i)$,以构成初始策略。令 $k=1$。

令

$$u_1(1)=5$$
$$u_1(2)=4$$
$$u_1(3)=5$$
$$u_1(4)=3$$

则各初始策略为:

①→⑤

②→④→③→⑤

③→⑤

④→③→⑤

需要注意的是,在给定初始策略时,必须无回路,这样,在策略迭代过程中,也不会产生回路(证明从略)。另外,在给定初始策略时,还应尽可能接近最优策略。

② 由 $u_k(i)\to f_k(i)$

这里有两种方法。下面以 $k=1$ 为例分别加以介绍。

方法一:按已知初始策略,逐段距离累加。例如:

$$f_1(2)=c_{24}+c_{43}+c_{35}=5+1+5=11$$

方法二:解函数方程组,求出各 $f_1(i)$

当迭代次数 $k=1$ 时,有

$$\begin{cases}f_1(i)=c_{i,u_1(i)}+f_1(u_1(i))\\ f_1(5)=0\end{cases}$$

即

$$\text{当}\,i=1\,\text{时},\ f_1(1)=c_{15}+f_1(5)$$
$$i=2\,\text{时},\ f_1(2)=c_{24}+f_1(4)$$
$$i=3\,\text{时},\ f_1(3)=c_{35}+f_1(5)$$
$$i=4\,\text{时},\ f_1(4)=c_{43}+f_1(3)$$
$$i=5\,\text{时},\ f_1(5)=0$$

求解上述方程组,可得

$$\begin{cases} f_1(1)=2 \\ f_1(2)=11 \\ f_1(3)=5 \\ f_1(4)=6 \\ f_1(5)=0 \end{cases}$$

一般而言,第 k 次迭代结果的第i 城到第N 城的距离$f_k(i)$,等于由 i 到$j=u_k(i)$的一步距离,再加上由 j 到第N 城的距离,即有

$$\begin{cases} f_k(i)=c_{i,u_k(i)}+f_k(u_k(i)) \quad (i=1,2,\cdots,N-1) \\ f_k(N)=0 \end{cases}$$

利用上述迭代方程,可求解出各 $f_k(i)$。

③ 由 $f_k(i)\rightarrow u_{k+1}(i)$。

这是策略迭代法中重要的一步。

对每一个确定的 i 值($i=1,2,3,4$),利用上一步刚刚求出 $f_k(j)$的代入式

$$A=\min_j[c_{ij}+f_k(j)]$$

由此式求最小值 A,以便确定由 i 开始一步先到哪城为最好。最小值 A 所对应的j 即为$u_{k+1}(i)$。$k=1$ 时的计算结果见表 8.10。需要注意的是,这里的 A 并不是$f_{k+1}(i)$,由 $u_{k+1}(i)$到$f_{k+1}(i)$还需要再求。

表 8.10

$c_{ij}+f_1(j)$ \ j / i	1	2	3	4	5	$u_2(i)$
1	0+2	∞+11	5+5	2+6	2+0*	5
2	∞+2	0+11	1+5*	5+6	7+0	3
3	5+2	1+11	0+5	1+6	5+0*	5
4	2+2	5+11	1+5	0+6	3+0*	5

④ 令 $k=k+1$。按第 2,3 两步反复迭代,直到各 $u_k(i)=u_{k+1}(i)$为止。

当迭代到各 $u_k(i)=u_{k+1}(i)$时,即得最优策略,停止迭代。本例迭代到 $f_3(i)\rightarrow u_4(i)$时即得最优策略:

$$u_4(1)=5$$
$$u_4(2)=3$$
$$u_4(3)=4$$
$$u_4(4)=5$$
$$u_4(5)=5$$

以上介绍了求解确定性不定期决策过程的函数迭代法和策略迭代法。一般来说,给定初始策略比给定初始指标函数值要容易些,因此,策略迭代法比函数迭代法使用起来要方便些,其收敛速度也快些。

8.4.4 动态规划方法的优点与限制

任何一个多阶段决策过程的最优化问题,都可以用非线性模型来描述,原则上也可以用非

线性规划方法求解。那么,用动态规划方法有什么优越性呢?

(1) 有能力处理广泛类型的状态转移方程和指标函数

动态规划方法对广泛类型的状态转移方程和指标函数,不需在解析性质方面作任何限制、要求,例如非线性的,非二次型的,非连续的,非解析的,以及列成表格的数据等许多类型都能应用动态规划方法。

(2) 处理某些类型的约束条件很方便

对其他最优化方法而言,各类约束都会引出严重的麻烦,增加求解问题的难度,而对于动态规划,约束条件恰恰减少了状态变量和决策变量的取值范围,从而减少了计算量。即变量的某些类型的约束(例如变量是整数或非负)有利于动态规划,却破坏了其他一些计算方法应用的可能性。

(3) 固有的简单性

动态规划方法把一个多变量的全过程最优化问题分解为以阶段为单位的若干个类似的子问题,每个子问题的变量数比原问题少得多,其约束集合也简单得多,故大大简化了问题的求解。这是经典极值方法做不到的。

(4) 总是求出全局最优结果

动态规划方法总是求出全局最优结果,而其他方法求出的往往只是局部最优(甚至是驻点)。在这一点上,它几乎超越了所有其他计算方法,特别是经典极值方法。当然,它是在离散精度内的全局最优结果。

(5) 总是得到一族最优结果

动态规划方法不仅能得到全局最优结果,还能得到一族最优结果。有了这一族最优结果,便于分析、比较不同的结果,且如果由于某种原因偏离了原始最优轨迹,也可以很方便地找出余下阶段的新的最优子策略。

(6) 应用动态规划方法的限制

由前述可知,离散动态规划属于隐式枚举的范畴,它同样没有摆脱组合爆炸的阴影。因此,应用动态规划方法的主要限制是维数障碍,直接应用动态规划方法只适于维数相当低的问题,这是动态规划明显的不足之处。虽然有了一些降低维数的处理技术与方法,也只是在一定范围内、一定程度上克服这个障碍,寻找求解高维问题的更有效的手段,仍然是动态规划领域中重要的研究课题。

在构造动态规划模型时,状态变量必须满足无后效性,而不少实际问题取其自然特征作为状态变量往往不能满足这个条件,因此限制了动态规划的适用范围。

另外,动态规划尚无统一的标准模型,只能针对不同的实际问题建立不同的模型,这也降低了它的通用性。

虽然动态规划存在一些不足之处,但其应用是广泛的,应用动态规划方法已成功的解决了许多实际问题。

习 题

1. 试用逆序递推和顺序递推两种方法分别计算图 8.9 所示的从 A 到 G 的最短路径及其最短距离值。
2. 计算如图 8.10 所示的从 A 到 E 的最短路线及其长度。
3. 计算图 8.11 中从 A 到 B、C 和 D 的最短路线,其中各段路线的长度如图所示。

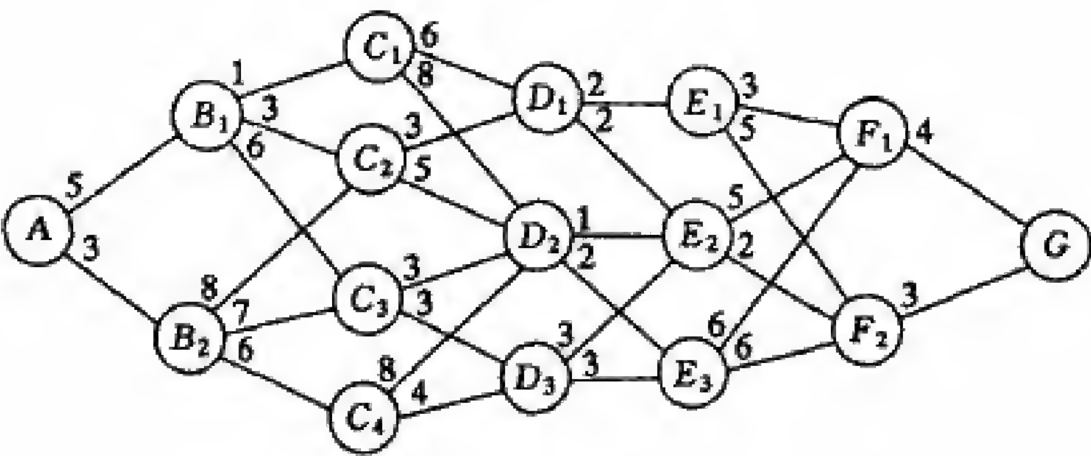


图 8.9

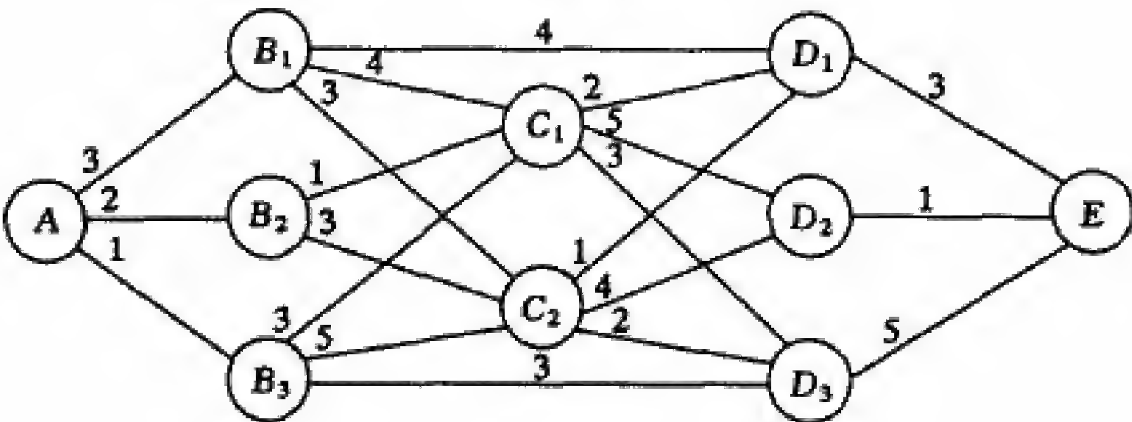


图 8.10

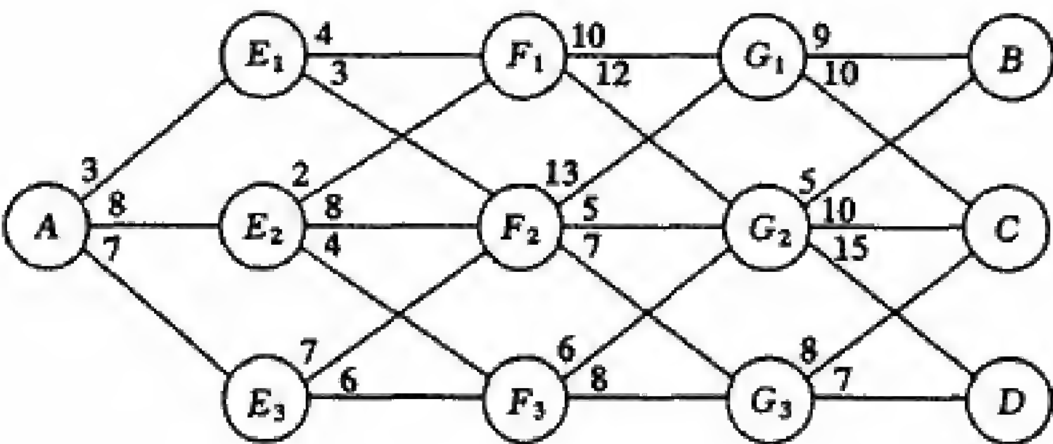


图 8.11

4. 有一部货车每天沿着公路的四个零售店卸下 6 箱货物，如果各零售店因出售该货物所得的利润如表 8.11，试求在各零售店各卸下几箱，能使获得总利润最大？

表 8.11

利润 零售店 / 箱数	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	4	2	3	4
2	6	4	5	5
3	7	6	7	6
4	7	8	8	6
5	7	9	8	6
6	7	10	8	6

5. 设某县从事区农村扫盲工作的工作人员有 6 名，当派往各区工作人员人数不同时，其扫盲的人数所增加的数目也不同，它们的关系如表 8.12 所示。试求应派往各区多少工作人员，才能使扫盲的人数所增加的数目最大？

表 8.12

增加的扫盲数工作人员数 \ 区名	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	20	25	18	28
2	42	45	39	47
3	60	57	61	65
4	75	65	78	74
5	85	70	90	80
6	90	73	95	85

6. 某工厂根据国家的需要其交货任务如表 8.13 所示。表中数字为月底的交货量。该厂的生产能力为每月 4 百件，该厂仓库的存货能力为 3 百件，已知每百件货物的成本费为 10 000 元，在进行生产的月份，工厂要支出开工费 4 000 元，仓库保管费为每百件货物每月 1 000 元。假定开始时及 6 月底交货后无存货。试问应在每个月各生产多少件货物，才能既满足交货任务又使总费用最小？

表 8.13

月　份	1	2	3	4	5	6
货物量/百件	1	2	5	3	2	1

7. 设有 1,2,3,4,5 五个城市，相互间的距离如图 8.12 所示。试用函数迭代法和策略迭代法求各城到第 5 城的最短路线和最短距离。

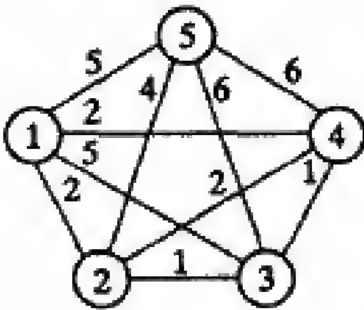


图 8.12

8. 试用动态规划方法求解下列整数非线性规划问题：

$$\min f(X) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 - 4x_2 - 2x_3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

x_1, x_2, x_3 均是非负整数

9 矩阵对策(博弈)

9.1 引 言

9.1.1 对策行为和对策论

对策论亦称竞赛论或博弈论,是研究具有斗争或竞争性质现象的数学理论和方法。一般认为,它既是现代数学的一个新分支,也是运筹规划中的一个重要学科。对策论发展的历史并不长,但由于它所研究的现象与人们的政治、经济、军事活动乃至一般的日常生活等有着密切的联系,并且处理问题的方法又有明显特色,所以日益引起广泛的注意。

在日常生活中,经常看到一些具有相互斗争或竞争性质的行为,如下棋、打牌、体育比赛等。还比如战争活动中的双方,都力图选取对自己最为有利的策略,千方百计去战胜对手。在政治方面,国际间的谈判,各种政治力量之间的斗争,各国际集团之间的斗争等无一不具有斗争的性质。在经济生活中,各国之间、各公司企业之间的各种经济谈判,企业之间为争夺市场而进行的竞争等,举不胜举。在生产过程中,如果将生产的管理者看成一方,将各种费用的消耗、成本及损失等看成另一方,则生产过程也可看成是上述双方的竞争过程。

具有竞争或对抗性质的行为称为对策行为。在这类行为中,参加斗争或竞争的各方各自具有不同的目标和利益。为了达到各自的目标和利益,各方必须考虑对手的各种可能的行动方案,并力图选取对自己最为有利或最为合理的方案。对策论就是研究对策行为中斗争各方是否存在着最合理的行动方案,以及如何找到这个合理的行动方案的数学理论和方法。

把各种对策产生的结果看作目标,二人博弈也可以被认为是争斗双方的多目标规划。(见参考文献[3])

在我国古代,“齐王赛马”就是一个典型的二人对策论研究的例子。

战国时代,齐王有一天提出要与田忌进行赛马。双方约定:从各自的上、中、下三个等级的马中各选一匹参赛;每匹马均只能参赛一次;每一次比赛双方各出一匹马,负者要付给胜者千金。已经知道,在同等级的马中,田忌的马不如齐王的马,而如果田忌的马比齐王的马高一等级,则田忌的马可取胜。当时,田忌的一个谋士孙膑给田忌出了个主意:每次比赛时先让齐王牵出他要参赛的马,然后用下马对齐王的上马,用中马对齐王的下马,用上马对齐王的中马。比赛结果,田忌二胜一负,可得千金。由此看来,两个人各采取什么样的出马次序对胜负是至关重要的。

9.1.2 对策行为的三个基本要素

以下称具有对策行为的模型为对策模型,或对策。对策模型的种类可以千差万别,但本质上都必须包括如下三个基本要素。

(1) 局中人

在一个对策行为(或一局对策)中,有权决定自己行动方案的对策参加者,称为局中人。通常用 I 表示局中人的集合。如果有 n 个局中人,则 $I=\{1,2,\cdots,n\}$。一般要求一个对策中至少要有两个局中人。如在"齐王赛马"的例子中,局中人是齐王和田忌。

对策中关于局中人的概念是具有广义性的。局中人除了可理解为个人外,还可理解为某一集体,如球队、交战国、企业等。当研究在不确定的气候条件下进行某项与气候条件有关的生产决策时,也可把大自然当作局中人。另外,在一个对策中利益完全一致的参加者只能看成是一个局中人,例如桥牌中的东、西方和南、北方各为一个局中人,虽有四人参赛,但只能算有两个局中人。

需要补充的一点是,在对策中总是假定每一个局中人都是"理智的"决策者或竞争者,即对任一局中人来讲,不存在利用其他局中人决策的失误来扩大自身利益的可能性或相反。

(2)策略集

一局对策中,可供局中人选择的一个实际可行的完整的行动方案称为一个策略。参加对策的每一局中人 $i,i\in I$,都有自己的策略集 S_i。一般,每一局中人的策略集中至少应包括两个策略。

在"齐王赛马"的例子中,如果用(上,中,下)表示以上马、中马、下马依次参赛这样一个次序,这就是一个完整的行动方案,即为一个策略。可见,局中人齐王和田忌各自都有六个策略:(上,中,下),(上,下,中)(中,上,下)(中,下,上),(下,中,上)(下,上,中)。

(3) 赢得函数(支付函数)

在一局对策中,各局中人所选定的策略形成的策略组称为一个局势,即若 s_i 是第 i 个局中人的一个策略,则 n 个局中人的策略组

$$s=(s_1,s_2,\cdots,s_n)$$

就是一个局势。全体局势的集合 S 可用各局中人策略集的笛卡儿积表示,即

$$S=S_1\times S_2\times\cdots\times S_n$$

当局势出现后,对策的结果也就确定了。也就是说,对任一局势 $s\in S$,局中人 i 可以得到一个赢得 $H_i(s)$。显然,$H_i(s)$是局势 s 的函数,称之为第 i 个局中人的赢得函数。在齐王与田忌赛马的例子中,局中人集合 $I=\{1,2\}$,齐王和田忌的策略集可分别用 $S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6\}$和 $S_2=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5,\beta_6\}$表示。这样齐王的任一策略 α_i 和田忌的任一策略 β_j 就决定了一个局势 s_{ij}。如果 $\alpha_1=$(上,中,下),$\beta_1=$(上,中,下),则在局势 s_{11} 下齐王的赢得值为 $H_1(s_{11})=3$,田忌的赢得值为 $H_2(s_{11})=-3$,如此等等。

以上讨论了局中人、策略集和赢得函数这三个概念。一般当这三个基本因素确定后,一个对策模型也就给定了。

9.1.3 对策的分类

对策的种类很多,可以依据不同的原则进行分类。根据参加对策的局中人的数目,可分为二人对策和多人对策。在多人对策中还有结盟对策与不结盟对策之分,结盟对策又包括联合对策和合作对策。根据局中人策略集中策略的有限或无限,可将对策分为有限对策和无限对策。还可根据各局中人赢得函数值的代数和(赢者为正,输者为负)是否为零,将对策分为零和对策和非零和对策。所谓零和对策,是指一方的所得值为他方的所失值,零和对策亦称为对抗对策。此外,根据策略与时间的关系可将对策分为静态对策与动态对策。根据对策的数学模

型的类型可分为矩阵对策、连续对策、微分对策、阵地对策、随机对策等。主要的对策模型分类可由图 9.1 表示。

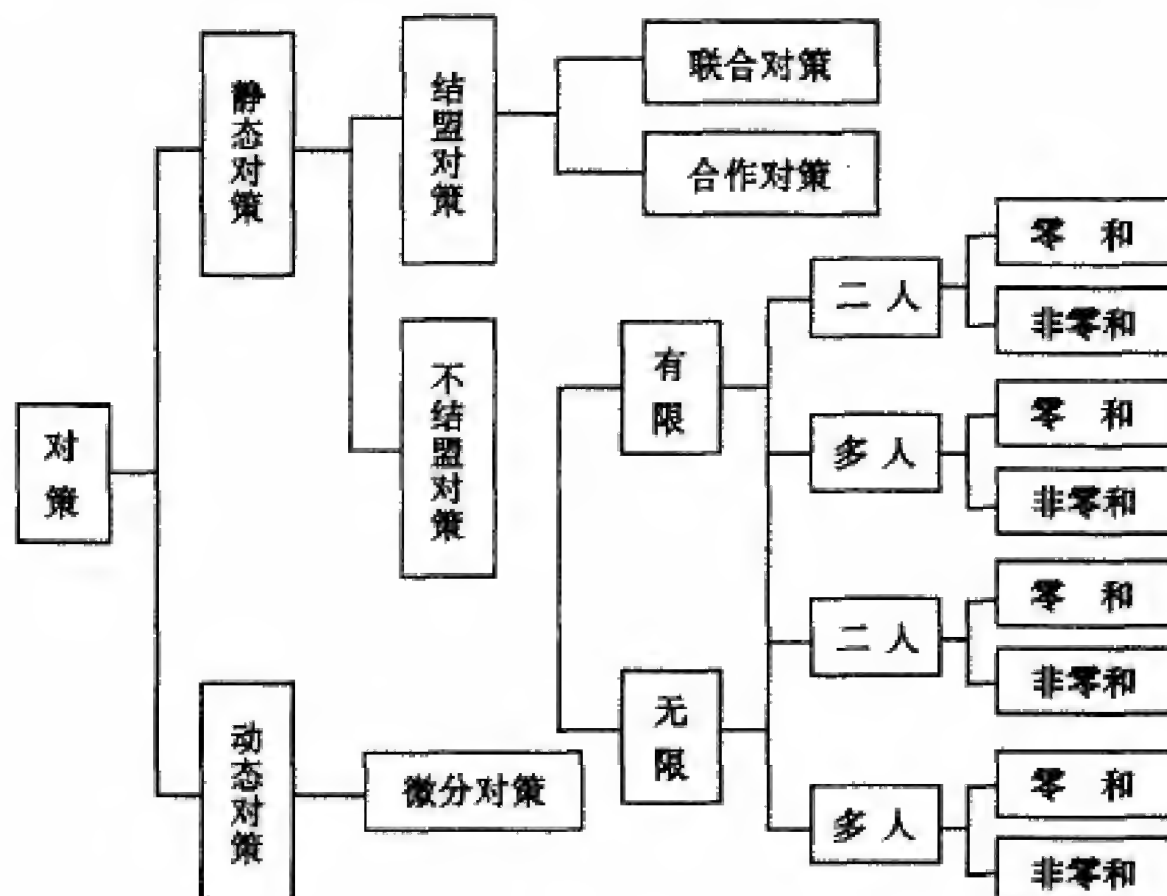


图 9.1

在众多对策模型中，占有重要地位的是二人有限零和对策，这类对策又称为矩阵对策。矩阵对策是到目前为止在理论研究和求解方法方面都比较完善的一类对策，而且这类对策的研究思想和理论结果又是研究其他类型对策模型的基础。因此，本章主要介绍矩阵对策的基本理论和方法。

9.2　矩阵对策的基本定理

9.2.1　矩阵对策的数学模型

矩阵对策就是二人有限零和对策。这是指只有两个参加对策的局中人，每个局中人都只有有限个策略可供选择。在任一局势下，两个局中人的赢得之和总是等于零，即双方的利益是激烈对抗的。“齐王赛马”就是一个矩阵对策的例子，齐王和田忌各有六个策略，一局对策结束后，齐王的所得必为田忌的所失，反之亦然。

一般，用Ⅰ，Ⅱ分别表示两个局中人，并设局中人Ⅰ有 m 个纯策略 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 可供选择，局中人Ⅱ共有 n 个纯策略 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 可供选择，则局中人Ⅰ，Ⅱ的策略集分别为

$$S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$$
$$S_2 = \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$$

当局中人Ⅰ选定纯策略 α_i 和局中人Ⅱ选定纯策略 β_j 后，就形成了一个纯局势 (α_i, β_j)。可见这样的纯局势共有 $m \cdot n$ 个，对任一纯局势 (α_i, β_j)，记局中人Ⅰ的赢得值为 a_{ij}，并称

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

为局中人Ⅰ的赢得矩阵(或为局中人Ⅱ的支付矩阵)。由于假定对策为零和的,故局中人Ⅱ的赢得矩阵就是 $-\boldsymbol{A}$。

当局中人Ⅰ,Ⅱ和策略集 S_1, S_2 及局中人Ⅰ的赢得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 确定后,一个矩阵对策就给定了。通常,将矩阵对策记成

$$G = \{ \text{Ⅰ}, \text{Ⅱ}; S_1, S_2; \boldsymbol{A} \} \text{ 或 } G = \{ S_1, S_2; \boldsymbol{A} \}$$

在“齐王赛马”的例子中,不难看出齐王的赢得表为 9.1:

表 9.1

齐王的策略 \ 齐王的赢得 \ 田忌的策略	$[\beta_1]$ (上中下)	$[\beta_2]$ (上下中)	$[\beta_3]$ (中上下)	$[\beta_4]$ (中下上)	$[\beta_5]$ (下中上)	$[\beta_6]$ (下上中)
α_1(上,中,下)	3	1	1	1	1	-1
α_2(上,下,中)	1	3	1	1	-1	1
α_3(中,上,下)	1	-1	3	1	1	1
α_4(中,下,上)	-1	1	1	3	1	1
α_5(下,中,上)	1	1	-1	1	3	1
α_6(下,上,中)	1	1	1	-1	1	3

赢得矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

矩阵对策模型给定后,各局中人面临的问题便是:如何选取对自己最为有利的纯策略以谋取最大的赢得(或最少损失)。下面通过一个具体例子来分析应如何求解各局中人的最优纯策略。

【例 9.1】 设有一矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; \boldsymbol{A}\}$,其中 $S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$, $S_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -6 & 1 & -8 \\ 3 & 2 & 4 \\ 9 & -1 & -10 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

由 A 可看出,局中人Ⅰ的最大赢得是 9,要想得到这个赢得,他就得选择纯策略 α_3。由于假定局中人Ⅱ也是理智的,他考虑到了局中人Ⅰ打算出 α_3 的心理,于是便准备以 β_3 对付之,使局中人Ⅰ不但得不到 9 反而失掉 10。局中人Ⅰ当然也会猜到局中人Ⅱ的这一心理,故想出 α_4 来对付,使局中人Ⅱ得不到 10 反而失掉 6。……所以,如果双方都不想冒险,都不存在侥幸心理,而是考虑到对方必然会设法使自己的所得最少这一点,就应该从各自可能出现的最不利的情形中选择一种最为有利的情形作为决策的依据,这就是所谓“理智行为”,也是对策双方实际上都能接受的一种稳妥的方法。

在例 9.1 中，局中人Ⅰ分析得出纯策略 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 可能带来的最少赢得(矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中每行的最小元素)分别为：

$$-8,2,-10,-3$$

在这些最小赢得(最不利的情形)中最好的结果(最有利的情形)是赢得为 2。因此，局中人Ⅰ只要以 α_2 参加对策，无论局中人Ⅱ选取什么样的纯策略，都能保证局中人Ⅰ的收入不会少于 2，而出其他任何纯策略，其收入都有可能少于 2，甚至输给对方。同理，对局中人Ⅱ来说，各纯策略 β_1,β_2,β_3 可能带来的对其最不利的结果(矩阵中每列中最大元素)分别为：

$$9,2,6$$

在这些最不利的结果中最好的结果(输得最少)也是 2，即局中人Ⅱ只要选择纯策略 β_2，无论局中人Ⅰ采取什么纯策略，都有能保证自己的支付不会多于 2，而采取其他任何纯策略，都有可能使自己的所失多于 2。上面的分析表明，局中人Ⅰ，Ⅱ的"理智行为"分别是选取纯策略 α_2 和 β_2，这时局中人Ⅰ的赢得值和局中人Ⅱ的所失值的绝对值相等(都是 2)。局中人Ⅰ是按最大最小原则，局中人Ⅱ是按最小最大原则选择各自的纯策略，这对双方来说都是一种最为稳妥的行为。因此 α_2,β_2 分别为局中人Ⅰ，Ⅱ的最优纯策略。

对于一般矩阵对策，有如下定义：

定义 9.1 设 $G=\{S_2,S_2;\boldsymbol{A}\}$ 为矩阵对策，其中 $S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$，$S_2=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$，$\boldsymbol{A}=(\alpha_{ij})_{m\times n}$。若等式

$$\max_i \min_j \alpha_{ij}=\min_j \max_i \alpha_{ij}=\alpha_{i^*j^*} \tag{9.2.1}$$

成立，记 $V_G=\alpha_{i^*j^*}$。则称 V_G 为对策 G 的值，称使(9.2.1)式成立的纯局势$(\alpha_{i^*},\beta_{j^*})$为 G 在纯策略下的解(或平衡局势)，α_{i^*} 与 β_{j^*} 分别称为局中人Ⅰ，Ⅱ的最优纯策略。

由定义 9.1 可知，在矩阵对策中两个局中人都采取最优纯策略(如果最优纯策略存在)才是理智的行动。

【例 9.2】 求解矩阵对策 $G=\{S_1,S_2;\boldsymbol{A}\}$其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-7 & 1 & -8\\ 3 & 2 & 4\\ 16 & -1 & -3\\ -3 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

解 根据矩阵 $\boldsymbol{A}$，有

	β_1	β_2	β_3	$\min_j \alpha_{ij}$
α_1	−7	1	−8	−8
α_2	3	2	4	2*
α_3	16	−1	−3	−3
α_4	−3	0	5	−3
$\max_i \alpha_{ij}$	16	2*	5	

于是

$$\max_i \min_j \alpha_{ij}=\min_j \max_i \alpha_{ij}=\alpha_{22}=2$$

由定义 9.1，$V_G=2$，G 的解为(α_2,β_2)，α_2 与 β_2 分别是局中人Ⅰ和Ⅱ的最优纯策略。

从例 9.2 可以看出,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素 α_{22} 既是其所在行的最小元素,又是其所在列的最大元素,即

$$\alpha_{i2}\leqslant\alpha_{22}\leqslant\alpha_{2j}\quad i=1,2,3,4;j=1,2,3$$

将这一事实推广到一般矩阵对策,可得如下定理:

定理 9.1 矩阵对策 $G=\{S_2,S_2;\boldsymbol{A}\}$ 在纯策略意义下有解的充要条件是:存在纯局势 $(\alpha_{i^*},\beta_{j^*})$ 使得对一切 $i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n$,均有

$$\alpha_{ij^*}\leqslant\alpha_{i^*j^*}\leqslant\alpha_{i^*j}\tag{9.2.2}$$

证明 先证充分性。由于对任意 i,j 均有

$$\alpha_{ij^*}\leqslant\alpha_{i^*j^*}\leqslant\alpha_{i^*j}$$

故

$$\max_i\alpha_{ij^*}\leqslant\alpha_{i^*j^*}\leqslant\min_j\alpha_{i^*j}$$

又因

$$\min_j\max_i\alpha_{ij}\leqslant\max_i\alpha_{ij^*}$$
$$\min_j\alpha_{i^*j}\leqslant\max_i\min_j\alpha_{ij}$$

所以

$$\min_j\max_i\alpha_{ij}\leqslant\alpha_{i^*j^*}\leqslant\max_i\min_j\alpha_{ij}\tag{9.2.3}$$

另一方面,对任给 i,j 有

$$\min_j\alpha_{ij}\leqslant\alpha_{ij}\leqslant\min_j\max_i\alpha_{ij}$$

所以

$$\max_i\min_j\alpha_{ij}\leqslant\min_j\max_i\alpha_{ij}\tag{9.2.4}$$

由(9.2.3)和(9.2.4)有

$$\max_i\min_j\alpha_{ij}\leqslant\min_j\max_i\alpha_{ij}=\alpha_{i^*j^*}$$

且 $V_G=\alpha_{i^*j^*}$。

现在来证明必要性。设有 i^*,j^* 使得

$$\min_j\alpha_{i^*j}=\max_i\min_j\alpha_{ij}$$
$$\max_i\alpha_{ij^*}=\min_j\max_i\alpha_{ij}$$

则由

$$\max_i\min_j\alpha_{ij}=\min_j\max_i\alpha_{ij}$$

有

$$\max_i\alpha_{ij^*}=\min_j\alpha_{i^*j}\leqslant\alpha_{i^*j^*}\leqslant\max_i\alpha_{ij^*}=\min_j\alpha_{i^*j}$$

所以对任意 i,j 有

$$\alpha_{ij^*}\leqslant\max_i\alpha_{ij^*}\leqslant\alpha_{i^*j^*}\leqslant\min_j\alpha_{i^*j}\leqslant\alpha_{i^*j}$$

证毕。

为了便于对更为广泛的对策情形进行分析,现引进关于二元函数鞍点的概念:

定义 9.2 设 $f(x,y)$ 为一个定义在 $x\in A$ 及 $y\in B$ 上的实值函数,如果存在 $x^*\in A$,$y^*\in B$,使得对一切 $x\in A$ 和 $y\in B$,有

$$f(x,y^*)\leqslant f(x^*,y^*)\leqslant f(x^*,y) \tag{9.2.5}$$

则称(x^*,y^*)为函数 f 的一个鞍点。

由定义 9.2 及定理 9.1 可知，矩阵对策 G 在纯策略意义下有解，且 $V_G=\alpha_{i^*j^*}$ 的充要条件是：$\alpha_{i^*j^*}$是矩阵 A 的一个鞍点。在对策论中，矩阵 $\mathbf{A}$ 的鞍点也称为对策的鞍点。

关于定理 9.1 中(9.2.2)式的直观解释是：如果 $\alpha_{i^*j^*}$既是矩阵 $\mathbf{A}=(\alpha_{ij})_{m\times n}$中第 i^* 行的最小值，又是 $\mathbf{A}$ 中第j^*列的最大值，则 $\alpha_{i^*j^*}$即为对策的值，且$(\alpha_{i^*},\beta_{j^*})$就是对策的解。其对策意义是：一个平衡局势$(\alpha_{i^*},\beta_{j^*})$应具有这样的性质，当局中人Ⅰ选取了纯策略 α_{i^*}后，局中人Ⅱ为了使其所失最少，只有选择纯策略 β_{j^*}，否则就可能失得更多；反之，当局中人Ⅱ选取了纯策略 β_{j^*}后，局中人Ⅰ为了得到最大的赢得也只能选取纯策略 α_{i^*}，否则就会赢得更少。双方的竞争在局势$(\alpha_{i^*},\beta_{j^*})$下达到了一个平衡状态。

【例 9.3】 设有矩阵对策 $G=\{S_1,S_2;\mathbf{A}\}$，其中 $S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$，$S_2=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\}$赢得矩阵为

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}6&5&6&5\\1&4&2&-1\\8&5&7&5\\0&2&6&2\end{bmatrix}$$

解 直接在 $\mathbf{A}$ 提供的赢得表上计算，有

$$\begin{array}{c|cccc|c} & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \min\\ \alpha_1 & 6 & 5 & 6 & 5 & 5^*\\ \alpha_2 & 1 & 4 & 2 & -1 & -1\\ \alpha_3 & 8 & 5 & 7 & 5 & 5^*\\ \alpha_4 & 0 & 2 & 6 & 2 & 0\\ \max & 8 & 5^* & 7 & 5^* & \end{array}$$

于是

$$\max_i \min_j \alpha_{ij}=\min_j \max_i \alpha_{ij}=\alpha_{i^*j^*}=5$$

其中

$$i^*=1,3,\ \ j^*=2,4$$

故(α_1,β_2)，(α_1,β_4)，(α_3,β_2)，(α_3,β_4)四个局势都是对策的解，且 $V_G=5$。

由例 9.3 可知，一般矩阵对策的解可以是不惟一的，当解不惟一时，解之间的关系具有下面两条性质：

性质 1 无差别性。即若$(\alpha_{i_1},\beta_{j_1})$和$(\alpha_{i_2},\beta_{j_2})$是对策 G 的两个解，则

$$\alpha_{i_1j_1}=\alpha_{i_2j_2}$$

性质 2 可交换性。即若$(\alpha_{i_1},\beta_{j_1})$和$(\alpha_{i_2},\beta_{j_2})$是对策 G 的两个解，则$(\alpha_{i_1},\beta_{j_2})$和$(\alpha_{i_2},\beta_{j_1})$也是解。

上面两条性质的证明留给读者作为练习。这两条性质表明，矩阵对策的值是惟一的。即当局中人Ⅰ采用构成解的最优纯策略时，能保证他的赢得 V_G 不依赖于对方的纯策略。

最后，举一个实际应用的例子。

【例 9.4】 某单位采购员在秋天要决定冬季取暖用煤的贮量问题。已知在正常的冬季气温条件下要消耗 15 吨煤,在较暖与较冷的气温条件下要消耗 10 吨和 20 吨。假定冬季时的煤价随天气寒冷程度而有变化,在较暖、正常、较冷的气候条件下每吨煤价分别为 10 元,15 元和 20 元,又设秋季时煤价为每吨 10 元。在没有关于当年冬季准确的气象预报的条件下,秋季贮煤多少吨能使单位的支出最少?

这一贮量问题可以看成是一个对策问题,把采购员当作局中人Ⅰ,他有三个策略:在秋天时买 10 吨,15 吨与 20 吨,分别记为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$。

把大自然看作局中人Ⅱ(可以当作理智的局中人来处理),大自然(冬季气温)有三种策略:出现较暖的、正常的与较冷的冬季,分别记为 β_1,β_2,β_3。

现在把该单位冬季取暖用煤实际费用(即秋季购煤时的费用,与冬季不够时再补购的费用总和)作为局中人的赢得,得矩阵如下:

$$\begin{array}{c} \\ \alpha_1(10\text{ 吨}) \\ \alpha_2(15\text{ 吨}) \\ \alpha_3(20\text{ 吨}) \end{array} \begin{array}{c} \beta_1(\text{较暖}) \quad \beta_2(\text{正常}) \quad \beta_3(\text{较冷}) \\ \begin{bmatrix} -100 & -175 & -300 \\ -150 & -150 & -250 \\ -200 & -200 & -200 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\max_i \min_j \alpha_{ij} = \min_j \max_i \alpha_{ij} = \alpha_{33} = -200$$

故对策的解为(α_3,β_3),即冬季贮煤 20 吨合理。

9.2.2 矩阵对策的混合策略

由上节的讨论可知,对矩阵对策 $G=\{S_1,S_2;\boldsymbol{A}\}$来说,局中人Ⅰ有把握的至少赢得是

$$v_1 = \max_i \min_j \alpha_{ij}$$

局中人Ⅱ有把握的至多损失是

$$v_2 = \min_j \max_i \alpha_{ij}$$

一般,局中人Ⅰ的赢得值不会多于局中人Ⅱ的所失值,即总有 $v_1 \leqslant v_2$,当 $v_1 = v_2$ 时,矩阵对策 G 存在纯策略意义下的解,且 $V_G = v_1 = v_2$。然而,一般情形不总是如此,实际中出现的更多的情形是 $v_1 < v_2$,这样根据定义 9.1,对策不存在纯策略意义下的解。例如对于赢得矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

的对策来说,

$$v_1 = \max_i \min_j \alpha_{ij} = 4, \quad i^* = 2$$

$$v_2 = \min_j \max_i \alpha_{ij} = 5, \quad j^* = 1$$

$$v_2 = \alpha_{21} = 5 > 4 = v_1$$

于是,当双方各根据从最不利情形中选取最有利的结果的原则选择纯策略时,应分别选取 α_2 和 β_1,此时局中人Ⅰ将赢得 5,比其预期赢得 $v_1 = 4$ 还多,原因就在于局中人Ⅱ选择了 β_1,使他的对手多得了原来不该得的赢得,故 β_1 对局中人Ⅱ来说并不是最优的,因而他会考虑出 β_2。局中人Ⅰ亦会采取相应办法,改出 α_1 以使赢得为 6,而局中人Ⅱ又可能仍取策略 β_1 来对

付局中人Ⅰ的策略，这样，局中人Ⅰ出 α_1 或 α_2 的可能性及局中人Ⅱ出 β_1 或 β_2 的可能性都不能排除，对两个局中人来说，不存在一个双方均可接受的平衡局势，或者说当 $v_1 < v_2$ 时，矩阵对策 G 不存在纯策略意义下的解。在这种情况下，一个比较自然且合乎实际的想法是：既然各局中人没有最优纯策略可出，是否可以给出一个选取不同策略的概率分布。如在上例中，局中人Ⅰ可以制定如下一种策略：分别以概率 1/4 和 3/4 选取纯策略 α_1 和 α_2，这种策略是局中人Ⅰ的策略集 $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ 上的一个概率分布，称之为混合策略。同样局中人Ⅱ也可制定这样一种混合策略：分别以概率 1/2，1/2 选取纯策略 β_1, β_2。下面给出矩阵对策混合策略的严格定义：

定义 9.3 设有矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; \boldsymbol{A}\}$，其中 $S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$，$S_2 = \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$，$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$，记

$$S_1^* = \left\{x \in E^m \mid x_i \geqslant 0, \quad i = 1,2,\cdots,m, \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\right\}$$

$$S_2^* = \left\{y \in E^n \mid y_j \geqslant 0, \quad j = 1,2,\cdots,n, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1\right\}$$

则 S_1^* 和 S_2^* 分别称为局中人Ⅰ和Ⅱ的混合策略集(或策略集)；$\boldsymbol{x} \in S_1^*$ 和 $\boldsymbol{y} \in S_2^*$ 分别称为局中人Ⅰ和Ⅱ的混合策略(或策略)；对 $\boldsymbol{x} \in S_1^*$，$\boldsymbol{y} \in S_2^*$，称 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 为一个混合局势(或局势)，局中人Ⅰ的赢得函数记成

$$E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i y_j \tag{9.2.6}$$

这样得到的一个新的对策记成 $G^* = \{S_1^*, S_2^*, E\}$，称 G^* 为对策 G 的混合扩充。

由定义 9.3 可知，纯策略是混合策略的特例。例如局中人Ⅰ的纯策略 α_k 等价于混合策略 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_m)^{\mathrm{T}} \in S_1^*$，其中

$$x_i = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

可见纯策略是 0-1 整数型混合策略。一个混合策略 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_m)^{\mathrm{T}}$ 可设想成当两个局中人多次重复进行对策 G 时，局中人Ⅰ分别采取纯策略 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 的频率。若只进行一次对策，混合策略 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_m)^{\mathrm{T}}$ 可设想成局中人Ⅰ对各纯策略的偏爱程度。下面讨论矩阵对策 G 在混合策略意义下解的定义。

设两个局中人仍像前面一样进行有理智的对策。当局中人Ⅰ采取混合策略 $\boldsymbol{x}$ 时，他只能希望获得(最不利的情形)

$$\min_{y \in S_2^*} E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

因此局中人Ⅰ应选取 $\boldsymbol{x} \in S_1^*$，使得上式取极大值(最不利当中的最有利情形)，即局中人Ⅰ可保证自己的赢得期望值不少于

$$v_1 = \max_{x \in S_1^*} \min_{y \in S_2^*} E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \tag{9.2.7}$$

同理，局中人Ⅱ可保证自己的所失期望值至多是

$$v_2 = \min_{y \in S_2^*} \max_{x \in S_1^*} E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \tag{9.2.8}$$

首先，注意到表达式(9.2.7)和(9.2.8)是有意义的。因为根据定义，局中人Ⅰ的赢得函数 $E(x, y)$ 是欧氏空间 E^{m+n} 内一个有界闭集 $D = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mid x_i \geqslant 0, y_i \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,m, j = 1,2,$

$\cdots, n, \sum_i x_i = 1, \sum_j y_j = 1\}$上的连续函数,因此,对固定的 x, $E(x,y)$是 S_2^* 上的连续函数,故 $\min\limits_{y\in S_2^*} E(x,y)$存在,而且 $\min\limits_{y\in S_2^*} E(x,y)$也是 S_1^* 上的连续函数,故 $\max\limits_{x\in S_1^*} \min\limits_{y\in S_2^*} E(x,y)$存在。同样可说明 $\min\limits_{y\in S_2^*} \max\limits_{x\in S_1^*} E(x,y)$存在。其次,仍然有 $v_1 < v_2$。事实上,设

$$\max_{x\in S_1^*} \min_{y\in S_2^*} E(x,y) = \min_y E(x^*, y)$$

$$\min_{y\in S_2^*} \max_{x\in S_1^*} E(x,y) = \max E(x, y^*)$$

于是

$$v_1 = \min_{y\in S_2^*} E(x^*, y) \leqslant E(x^*, y^*) \leqslant \max_{x\in S_1^*} E(x, y^*) = v_2$$

定义 9.4 设 $G^* = \{S_1^*, S_2^*; E\}$是矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; \boldsymbol{A}\}$的混合扩充,如果

$$\max_{x\in S_1^*} \min_{y\in S_2^*} E(x,y) = \min_{y\in S_2^*} \max_{x\in S_1^*} E(x,y) \tag{9.2.9}$$

记其值为 V_G. 则称 V_G 为对策 G^* 的值,称使(9.2.9)式成立的混合局势(x^*, y^*)为 G 在混合策略意义下的解(或简称解),x^* 和 y^* 分别称为局中人Ⅰ和Ⅱ的最优混合策略(或简称最优策略)。

现约定,以下对 $G = \{S_1, S_2; \boldsymbol{A}\}$及其混合扩充 $G^* = \{S_1^*, S_2^*, E\}$一般不加区别,通常都用 $G = \{S_1, S_2; \boldsymbol{A}\}$来表示。当 G 在纯策略意义下解不存在时,自动认为讨论的是在混合策略意义下的解,相应的局中人Ⅰ的赢得函数为 $E(x,y)$。

和定理 9.1 类似,可给出矩阵对策 G 在混合策略意义下解存在的鞍点型充要条件。

定理 9.2 矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; \boldsymbol{A}\}$在混合策略意义下有解的充要条件是:存在 $x^* \in S_1^*$, $y^* \in S_2^*$ 使(x^*, y^*)为函数 $E(x,y)$的一个鞍点,即对一切 $x \in S_1^*$, $y \in S_2^*$,有

$$E(x, y^*) \leqslant E(x^*, y^*) \leqslant E(x^*, y) \tag{9.2.10}$$

本定理的证明同定理 9.1,只需将 a_{ij}换写成$E(x,y)$,读者可自证之。应注意到,当 G 在纯策略意义下解存在时,定义 9.4 中关于对策 G 的值的定义 V_G 与前面的定义是一致的。当 G 在混合策略意义下的解(x^*, y^*)存在时, $V_G = (x^*, y^*)$。

【例 9.5】 考虑矩阵对策 $G = \{S_1, S_2,; \boldsymbol{A}\}$,其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

由前面的讨论已知 G 在纯策略意义下解不存在,于是设 $x = (x_1, x_2)$为局中人Ⅰ的混合策略, $y = \{y_1, y_2\}$为局中人Ⅱ的混合策略,则

$$S_1^* = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \geqslant 0, x_1 + x_2 = 1\}$$

$$S_2^* = \{(y_1, y_2) \mid y_1, y_2 \geqslant 0, y_1 + y_2 = 1\}$$

局中人Ⅰ的赢得期望是

$$\begin{aligned} E(x,y) &= 3x_1y_1 + 6x_1y_2 + 5x_2y_1 + 4x_2y_2 \\ &= 3x_1y_1 + 6x_1(1-y_1) + 5y_1(1-x_1) + 4(1-x_1)(1-y_1) \\ &= -4\left(x_1 - \frac{1}{4}\right)\left(y_1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{9}{2} \end{aligned}$$

取 $x^* = (1/4, 3/4)$, $y^* = (1/2, 1/2)$,则 $E(x^*, y^*) = 9/2$, $E(x^*, y) = E(x, y^*) = 9/2$, 即

有

$$E(x,y^*)\leqslant E(x^*,y^*)\leqslant E(x^*,y)$$

故 $x^*=(1/4,3/4)$和 $y^*=(1/2,1/2)$分别为局中人Ⅰ和Ⅱ的最优策略，对策的值(局中人Ⅰ的赢得期望值) $V_G=9/2$。

9.2.3 矩阵对策的基本定理

本节主要讨论矩阵对策解的存在性及解的有关性质。如前所述，一般矩阵对策在纯策略意义下的解往往是不存在的，但本节将证明，一般矩阵对策在混合策略意义下的解却总是存在的，并且通过一个构造性的证明，将引出一个求解矩阵对策的基本方法 —— 线性规划方法。

先给出如下两个记号：

当局中人Ⅰ取纯策略 α_i 时，记其相应的赢得函数为 $E(i,y)$，于是

$$E(i,y)=\sum a_{ij}y_j \tag{9.2.11}$$

当局中人Ⅱ取纯策略 β_j 时，记其相应的赢得函数为 $E(x,j)$，于是

$$E(x,j)=\sum_i a_{ij}x_i \tag{9.2.12}$$

由(9.2.11)和(9.2.12)式，有

$$\begin{aligned}E(x,y)&=\sum_i\sum_j a_{ij}x_iy_j=\sum_i(\sum_j a_{ij}y_j)x_i\\&=\sum_i E(i,y)x_i\end{aligned} \tag{9.2.13}$$

和

$$\begin{aligned}E(x,y)&=\sum_i\sum_j a_{ij}x_iy_j=\sum_j(\sum_i a_{ij}x_i)y_i\\&=\sum_j E(x,j)y_j\end{aligned} \tag{9.2.14}$$

根据上面的记号，可给出定理 9.2 的另一等价形式：

定理 9.3 设 $x^*\in S_1^*$，$y^*\in S_2^*$，则(x^*,y^*)是 G 的解的充要条件是：对任意 $i=1,2,\cdots,m$ 和 $j=1,2,\cdots,n$，有

$$E(i,y^*)\leqslant E(x^*,y^*)\leqslant E(x^*,j) \tag{9.2.15}$$

证明 设(x^*,y^*)是 G 的解，则由定理 9.2，(9.2.10)式成立。由于纯策略是混合策略的特例，故(9.2.15)式成立。反之，设(9.2.15)式成立，由

$$E(x,y^*)=\sum_i E(i,y^*)x_i\leqslant E(x^*,y^*)\cdot\sum_i x_i=E(x^*,y^*)$$

$$E(x^*,y)=\sum_j E(x^*,j)y_j\geqslant E(x^*,y^*)\cdot\sum_j y_j=E(x^*,y^*)$$

即得(9.2.10)式，证毕。

可以这样认识定理 9.3 的意义：在验证(x^*,y^*)是否为对策 G 的解时，(9.2.15)式把需要对无限个不等式进行验证的问题转化为只要对有限个不等式($m\times n$ 个)进行验证的问题，从而使下面的研究大为简化。

不难证明，定理 9.3 可表述为如下等价的形式，而这一形式在求解矩阵对策时是特别有用的。

定理 9.4 设 $x^*\in S_1^*$，$y^*\in S_2^*$，则(x^*,y^*)为 G 的解的充要条件是：存在数 v，使得

x^* 和 y^* 分别是不等式组

$$(\mathrm{I})\begin{cases}\sum_i \alpha_{ij}x_i \geqslant v & j=1,2,\cdots,n\\ \sum_i x_i = 1 & \\ x_i \geqslant 0 & i=1,2,\cdots,m\end{cases} \tag{9.2.16}$$

和不等式组

$$(\mathrm{II})\begin{cases}\sum_j \alpha_{ij}y_j \leqslant v & i=1,2,\cdots,m\\ \sum_j y_j = 1 & \\ y_j \geqslant 0 & j=1,2,\cdots,n\end{cases} \tag{9.2.17}$$

的解,且 $v=V_G$。

证明留给读者作为练习。

下面给出矩阵对策的基本定理,也是本节中最主要的结果:

定理 9.5 对任一矩阵对策 $G=\{S_1,S_2;\boldsymbol{A}\}$,一定存在混合策略意义下的解。

证明 由定理 9.3,只要证明 $x^*\in S_1^*$, $y^*\in S_2^*$ 存在,使得(9.2.15)式成立。为此,考虑如下两个线性规划问题:

$$\max\ w$$

$$(\mathrm{P})\begin{cases}\sum_i \alpha_{ij}x_i \geqslant w & j=1,2,\cdots,n\\ \sum_i x_i = 1 & \\ x_i \geqslant 0 & i=1,2,\cdots,m\end{cases}$$

和

$$\min v$$

$$(\mathrm{D})\begin{cases}\sum_j \alpha_{ij}y_j \leqslant v & i=1,2,\cdots,m\\ \sum_j y_j = 1 & \\ y_j \geqslant 0 & j=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

易验证,问题(P)和(D)是互为对偶的线性规划问题,而且

$$\boldsymbol{x}=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}\in E^m,\quad w=\min_j \alpha_{1j}$$

是问题(P)的一个可行解,

$$\boldsymbol{y}=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}\in E^n,\quad w=\max_i \alpha_{i1}$$

是问题(D)的一个可行解。由线性规划的对偶理论可知,问题(P)和(D)分别存在最优解(x^*, w^*)和(y^*, v^*),且 $v^*=w^*$。即存在 $x^*\in S_1^*$, $y^*\in S_2^*$ 和数 v^*,使得对任意 $i=1,2,\cdots,m$ 和 $j=1,2,\cdots,n$,有

$$\sum_j \alpha_{ij}y_j^* \leqslant v^* \leqslant \sum_i \alpha_{ij}x_i^* \tag{9.2.18}$$

或

$$E(i,y^*)\leqslant v^*\leqslant E(x^*,j) \tag{9.2.19}$$

又由

$$E(x^*,y^*)=\sum_i E(i,y^*)x_i^*\leqslant v^*\cdot\sum_i x_i^*=v^*$$
$$E(x^*,y^*)=\sum_j E(x^*,j)y_j^*\geqslant v^*\cdot\sum_j y_j^*=v^*$$

得到 $v^*=E(x^*,y^*)$，故由(9.2.19)式知(9.2.15)式成立。证毕。

定理 9.5 的证明是一个构造性的证明，不仅证明矩阵对策解的存在性，而且给出了利用线性规划方法求解矩阵对策的思想。

下面的定理 9.6 至定理 9.10 讨论了矩阵对策及其解的若干重要性质，它们在求解矩阵对策的过程中将起重要作用。

定理 9.6 设 (x^*,y^*) 是矩阵对策 G 的解，$v=V_G$ 则

(1) 若 $x_i^*>0$，则 $\sum_j a_{ij}y_j^*=v$

(2) 若 $y_j^*>0$，则 $\sum_i a_{ij}x_i^*=v$

(3) 若 $\sum_j a_{ij}y_j^*<v$，则 $x_i^*=0$

(4) 若 $\sum_i a_{ij}x_i^*>v$，则 $y_j^*=0$

证明 按定义有

$$v=\max_{x\in S_1^*}E(x,y^*)$$

故

$$v-\sum_j a_{ij}y_j^*=\max_{x\in S_1^*}E(x,y^*)-E(i,y^*)\geqslant 0$$

又因

$$\sum_i x_i^*(v-\sum_j a_{ij}y_j^*)=v-\sum_i\sum_j a_{ij}x_i^*y_j^*=0$$
$$x_i^*\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,m$$

所以，当 $x_i^*>0$ 时，必有 $\sum_j a_{ij}y_j^*=v$；当 $\sum_j a_{ij}y_j^*<v$ 时，必有 $x_i^*=0$，(1)，(3)得证。同理可证(2)，(4)。证毕。

记矩阵对策 G 的解集为 $T(G)$，下面三个定理是关于对策解集性质的主要结果：

定理 9.7 设有两个矩阵对策

$$G_1=\{S_1,S_2;\boldsymbol{A}_1\}$$
$$G_2=\{S_1,S_2;\boldsymbol{A}_2\}$$

其中 $\boldsymbol{A}_1=(a_{ij})$，$\boldsymbol{A}_2=(a_{ij}+L)$，$L$ 为任一常数。

(1) $V_{G_2}=V_{G_1}+L$

(2) $T(G_1)=T(G_2)$

定理 9.8 设有两个矩阵对策

$$G_1=\{S_1,S_2;\boldsymbol{A}\}$$
$$G_2=\{S_1,S_2;\alpha\boldsymbol{A}\}$$

其中 $\alpha>0$ 为任一常数。则

(1) $V_{G_2}=\alpha V_{G_1}$

(2) $T(G_1)=T(G_2)$

定理 9.9 设 $G=\{S_1,S_2;\mathbf{A}\}$为一矩阵对策，且 $\mathbf{A}=-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ 为斜对称矩阵（亦称这种对策为对称对策）。则

(1) $V_G=0$

(2) $T_1(G)=T_2(G)$

其中 $T_1(G)$和 $T_2(G)$分别为局中人Ⅰ和Ⅱ的最优策略集。

将定理 9.7 至定理 9.9 的证明留给读者去完成。在给出定理 9.10 之前，先给出矩阵对策优超纯策略的定义：

定义 9.5 设有矩阵对策 $G=\{S_1,S_2;\mathbf{A}\}$，其中 $S_1=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$，$S_2=\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$，$\mathbf{A}=(\alpha_{ij})$。如果对一切 $j=1,\cdots,n$，都有

$$\alpha_{i^0j}\geqslant\alpha_{k^0j}$$

即矩阵 $\mathbf{A}$ 的第 i^0 行元均不小于第 k^0 行的对应元，则称局中人Ⅰ的纯策略 α_{i^0}优超于 α_{k^0}；同样，若对一切 $i=1,\cdots,m$，都有

$$\alpha_{ij^0}\leqslant\alpha_{il^0}$$

即矩阵 $\mathbf{A}$ 的第 l^0 列元均不小于第 j^0 列的对应元，则称局中人Ⅱ的纯策略 β_{j^0}优超 β_{l^0}。

定理 9.10 设 $G=\{S_1,S_2;\mathbf{A}\}$为矩阵对策，其中 $S_1=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$，$S_2=\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$，$\mathbf{A}=(\alpha_{ij})$。如果纯策略 α_1 被其余纯策略 $\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中之一所优超，由 G 可得到一个新的矩阵对策 G'：

$$G'=\{S_1',S_2,\mathbf{A}'\}$$

其中

$$S_1'=\{\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$$

$$\mathbf{A}'=(\alpha'_{ij})_{(m-1)\times n}$$

$$\alpha'_{ij}=\alpha_{ij}\quad i=2,\cdots,m,\quad j=1,\cdots,n$$

于是有

(1) $V_{G'}=V_G$；

(2) G'中局中人Ⅱ的最优策略就是其在 G 中的最优策略；

(3) 若$(x_2^*,\cdots,x_m^*)^{\mathrm{T}}$是 G'中局中人Ⅰ的最优策略，则 $\boldsymbol{x}^*=(0,x_2^*,\cdots,x_m^*)^{\mathrm{T}}$便是其在 G 中的最优策略。

证明 不妨设 α_2 优超于 α_1，即

$$\alpha_{2j}\geqslant\alpha_{1j},j=1,\cdots,n \tag{9.2.20}$$

因 $\boldsymbol{x}'^*=(x_2^*,\cdots,x_m^*)^{\mathrm{T}}$和 $\boldsymbol{y}^*=(y_1^*,\cdots,y_n^*)^{\mathrm{T}}$是 G'的解，由定理 9.3，有

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}y_j^*\leqslant V_{G'}\leqslant\sum_{i=2}^{m}\alpha_{ij}x_i^*\quad i=2,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n \tag{9.2.21}$$

因 α_2 优超于 α_1，由(9.2.20)式有

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_{1j}y_j^*\leqslant\sum_{j=1}^{n}\alpha_{2j}y_j^*\leqslant V_{G'} \tag{9.2.22}$$

合并(9.2.21)和(9.2.22)式,得

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j^* \leqslant V_{G'} \leqslant \sum_{i=2}^{m} a_{ij}x_i^* + a_{1j}\cdot 0 \quad i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n$$

或

$$E(i,y^*)\leqslant V_{G'}\leqslant E(x^*,j) \quad i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n$$

由定理4,(x^*,y^*)是G的解,其中$x^*=(0,x_2^*,\cdots,x_m^*)^{\mathrm{T}}$,且$V_{G'}=V_G$证毕。

推论　在定理9.10中,若α_1不是为纯策略$\alpha_2,\cdots,\alpha_m$中之一所优超,而是为$\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的某个凸线性组合所优超,定理的结论仍然成立。

定理9.10实际给出了一个化简赢得矩阵$\boldsymbol{A}$的原则,被称之为优超原则。根据这个原则,当局中人Ⅰ的某纯策略α_i被其他纯策略或纯策略的凸线性组合所优超时,可在矩阵$\boldsymbol{A}$中划去第i行而得到一个与原对策G等价但赢得矩阵阶数较小的对策G',而G'的求解往往比G的求解容易些,通过求解G'而得到G的解。类似地,对局中人Ⅱ来说,可以在赢得矩阵$\boldsymbol{A}$中划去被其他列或其他列的凸线性组合所优超的那些列。

下面,举例说明优超原则的应用。

【例9.6】　设赢得矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&2&0&3&0\\5&0&2&5&9\\7&3&9&5&9\\4&6&8&7&5.5\\6&0&8&8&3\end{bmatrix}$$

求解这个矩阵对策。

解　由于第4行优超于第1行,第3行优超于第2行,故可划去第1行和第2行,得到新的赢得矩阵

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}7&3&9&5&9\\4&6&8&7&5.5\\6&0&8&8&3\end{bmatrix}$$

对于$\boldsymbol{A}_1$,第1列优超于第3列,第2列优超于第4列,$\frac{1}{3}\times$(第1列)$+\frac{2}{3}\times$(第2列)优超于第5列,因此去掉第3列,第4列和第5列,得到

$$\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}7&3\\4&6\\6&0\end{bmatrix}$$

这时,第一行又优超于第3行,故从$\boldsymbol{A}_2$中划去第3行,得到

$$\boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix}7&3\\4&6\end{bmatrix}$$

对于$\boldsymbol{A}_3$,易知无鞍点存在,应用定理4,求解不等式组

$$(\mathrm{I})\begin{cases}7x_3+4x_4\geqslant v\\3x_3+6x_4\geqslant v\\x_3+x_4=1\\x_3,x_4\geqslant 0\end{cases}\qquad(\mathrm{II})\begin{cases}7y_1+3y_2\leqslant v\\4y_1+6y_2\leqslant v\\y_1+y_2=1\\y_1,y_2\geqslant 0\end{cases}$$

首先考虑满足

$$\begin{cases} 7x_3+4x_4=v \\ 3x_3+6x_4=v \\ x_3+\ \ x_4=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 7y_1+3y_2=v \\ 4y_1+6y_2=v \\ y_1+\ \ y_2=1 \end{cases}$$

的非负解,求得解为

$$x_3^*=\frac{1}{3}, \quad x_4^*=\frac{2}{3};$$

$$x_1^*=\frac{1}{2}, \quad x_2^*=\frac{1}{2};$$

$$v=5$$

于是,原矩阵对策的一个解就是:

$$\boldsymbol{x}^*=\left(0,0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},0\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{y}^*=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0,0\right)^{\mathrm{T}},$$

$$V_G=5.$$

9.3 矩阵对策的解法

9.3.1 图解法、迭代法及其他方法

(1) 2×2 对策的公式法

所谓 2×2 对策是指局中人Ⅰ的赢得矩阵为 2×2 阶的,即

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

如果 $\boldsymbol{A}$ 有鞍点,则很快可求出各局中人的最优纯策略;如果 $\boldsymbol{A}$ 没有鞍点,则可证明各局中人最优混合策略中 x_i^*, y_i^* 的均大于零(习题 9)。于是,由定理 9.6 可知,为求得最优混合策略可求下列等式组:

$$(\text{I})\begin{cases} a_{11}x_1+a_{21}x_2=v \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2=v \\ x_1+\ \ \ \ x_2=1 \end{cases}$$

$$(\text{II})\begin{cases} a_{11}y_1+a_{12}y_2=v \\ a_{21}y_1+a_{22}y_2=v \\ y_1+\ \ \ \ y_2=1 \end{cases}$$

当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不存在鞍点时,可以证明上面等式组(Ⅰ)和(Ⅱ)一定有严格非负解 $\boldsymbol{x}^*=(x_1^*,x_2^*)$ 和 $\boldsymbol{y}^*=(y_1^*,y_2^*)$,其中

$$x_1^*=\frac{a_{22}-a_{21}}{(a_{11}+a_{22})-(a_{12}+a_{21})},$$

$$x_2^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})},$$

$$y_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})},$$

$$y_2^* = \frac{a_{11} - a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})},$$

$$V_G = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}.$$

(习题 11)。

【例 9.7】 求解矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; \boldsymbol{A}\}$,其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

解 易知,$\boldsymbol{A}$ 没有鞍点。由上述通解公式计算得到最优解为 $\boldsymbol{x}^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{y}^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)^{\mathrm{T}}$,对策值为$\frac{5}{2}$。

(2) $2 \times n$ 或 $m \times 2$ 对策的图解法

这里,介绍一种求矩阵对策的图解法,这个方法用在赢得矩阵为 $2 \times n$ 或 $m \times 2$ 阶的对策上特别方便,也可用在 $3 \times n$ 或 $m \times 3$ 对策上,但对 m 和 n 均大于 3 的矩阵对策就不适用了。现用一个 $2 \times n$ 对策的例子来说明这个方法。

【例 9.8】 考虑矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; \boldsymbol{A}\}$,其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2\}, S_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$$

设局中人Ⅰ的混合策略为$(x, 1-x)^{\mathrm{T}}$, $x \in [0,1]$。过数轴上坐标为 0 和 1 的两点分别做两条垂线Ⅰ-Ⅰ和Ⅱ-Ⅱ,垂线上点的纵坐标分别表示局中人Ⅰ采取纯策略 α_1 和 α_2 时,局中人Ⅱ采取各纯策略时的赢得值。如图 9.2。当局中人Ⅰ选择每一策略$(x, 1-x)^{\mathrm{T}}$时,他的最少可能的收入为由局中人Ⅱ选择 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 时所确定的三条直线 $2x + 7(1-x) = V$, $3x + 5(1-x) = V$, $11x + 2(1-x) = V$ 在 x 处的纵坐标中之最小者,即如折线 $B_1BB_2B_3$ 所示。所以对局中人Ⅰ来说,他的最优选择就是确定 x 使他的收入尽可能地多,从图 9.2 可知,按最小最大原则应选择 $x = 0A$,而 AB 即为对策值。为求出点 x 和对策的值 V_G,可联立过点 $\boldsymbol{B}$ 的两条线段 β_1 和 β_2 所确定的方程:

$$\begin{cases} 3x + 5(1-x) = V_G \\ 11x + 2(1-x) = V_G \end{cases}$$

解得 $x = \frac{3}{11}$, $V_G = \frac{49}{11}$。所以局中人Ⅰ的最优策略为 $\boldsymbol{x}^* = \left(\frac{3}{11}, \frac{8}{11}\right)^{\mathrm{T}}$。此外,从图上还可以看出,局中人Ⅱ的最优混合策略只由 β_1 和 β_2 组成(事实上,若记 $\boldsymbol{y}^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*)^{\mathrm{T}}$ 为局中人Ⅱ的最优混合策略,则由

$$E(\boldsymbol{x}^*, 1) = 2 \times \frac{3}{11} + 7 \times \frac{8}{11} = \frac{62}{11} > \frac{49}{11} = V_G,$$

$$E(x^*,2)=E(x^*,3)=V_G,$$

根据定理 9.6 可知,必有 $y_1^*=0, y_2^*>0, y_3^*>0$),根据定理 9.6,可由

$$\begin{cases} 3y_2+11y_3=\dfrac{49}{11} \\ 5y_2+\ \ 2y_3=\dfrac{49}{11} \\ \ \ y_2+\ \ \ \ y_3=1 \end{cases}$$

求得 $y_2^*=\frac{9}{11}, y_3^*=\frac{2}{11}$. 所以局中人Ⅱ的最优混合策略为 $\boldsymbol{y}^*=\left(0,\frac{9}{11},\frac{2}{11}\right)^{\mathrm{T}}$

【例 9.9】 用图解法求解矩阵对策 $G=\{S_1,S_2;\boldsymbol{A}\}$,其中 $S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$, $S_2=\{\beta_1,\beta_2\}$,

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 6 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}$$

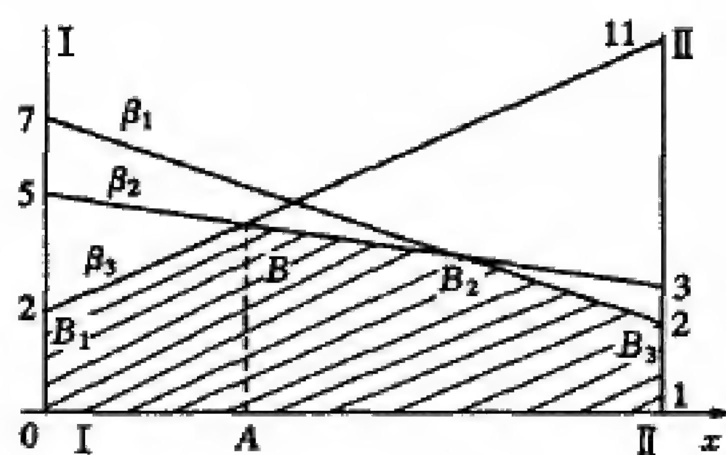


图 9.2 $2\times n$ 对策的图解法

设局中人Ⅱ的混合策略为$(y,1-y)^{\mathrm{T}}$,由图 9.3 可知,直线 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 在任一点 $y\in[0,1]$处的纵坐标分别是局中人Ⅱ采取混合策略$(y,1-y)^{\mathrm{T}}$ 时的支付。根据最不利当中选取最有利的原则,局中人Ⅱ的最优选择就是如何确定 y,以使三个纵坐标值中的最大值尽可能地小。从图 9.3 可见,就是应选择 $0A_1\leqslant y\leqslant 0A_2$,且对策的值显然为 6。由方程

$$2y+7(1-y)=6$$

和

$$11y+2(1-y)=6$$

求得 $0A_1=\frac{1}{5}, 0A_2=\frac{4}{9}$. 故局中人Ⅱ的最优混合策略是 $\boldsymbol{y}^*=(y,1-y)^{\mathrm{T}}$,其中$\frac{1}{5}\leqslant y\leqslant\frac{4}{9}$,而局中人Ⅰ的最优策略显然只能是$(0,1,0)^{\mathrm{T}}$,即取纯策略 α_2.

下面再举一个例子:

【例 9.10】 求解赢得矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 4 & \frac{8}{3} & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

的矩阵对策。

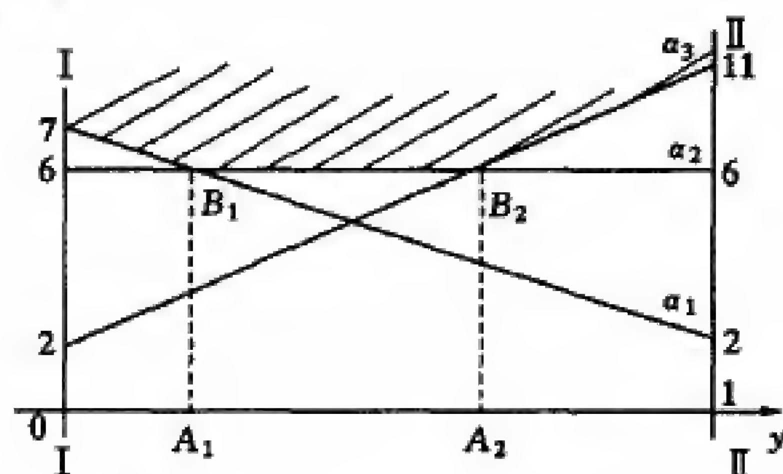


图 9.3 $m\times 2$ 对策的图解法

首先,利用优超原则,第 2 列优超于第 3 列,故可划去第 3 列。又因$\frac{2}{3}\times$(第 4 列)$+\frac{1}{3}\times$(第 1 列)$=$(第 2 列),由优超原则又可划去 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列。转而求解赢得矩阵为:

$$\boldsymbol{A}'=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

的对策 G',从而解得原对策的一个解为:

$$\boldsymbol{x}^*=\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)^{\mathrm{T}}$$

$$y^* = \left(\frac{5}{8}, 0, 0, \frac{3}{8}\right)^{\mathrm{T}}$$

$$V_G = \frac{13}{4}.$$

若用图解法求解本例，由图 9.4 可见，局中人Ⅰ的最优策略为 $x^* = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)^{\mathrm{T}}$，若记局中人Ⅱ的最优策略为 $y^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*)^{\mathrm{T}}$，则有 $y_3^* = 0$，而 y_1^*, y_2^*, y_4^* 可由以下联立方程确定。

$$4y_1 + \frac{8}{3}y_2 + 2y_4 = \frac{13}{4}$$

$$y_1 + 5y_2 + 7y_4 = \frac{13}{4}$$

$$y_1 + y_2 + y_4 = 1$$

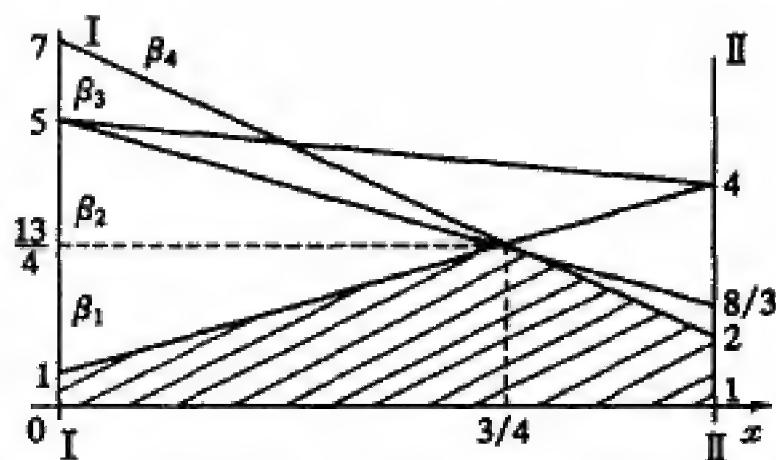


图 9.4

显然，满足上面方程组的解有无穷多个，故局中人Ⅱ有无穷多个最优混合策略。

例 9.10 说明，利用优超原则化简赢得矩阵时，有可能将原矩阵对策的解也划去一些，这种情况在 m 和 n 均大于 3 时仍然可能发生。

(3) 线性方程组方法

根据定理 9.4，求解矩阵对策解 (x^*, y^*) 的问题等价于求解不等式组(9.2.16)和(9.2.17)，又根据定理 9.5 和定理 9.6，如果假设最优策略中的 x_i^* 和 y_j^* 均不为零，即可将上述两个不等式组的求解问题转化成求解下面两个方程组的问题：

$$\left.\begin{array}{l} \sum_i a_{ij}x_i = v \quad j = 1, \cdots, n \\ \sum_i x_i = 1 \end{array}\right\} \tag{9.3.1}$$

和

$$\left.\begin{array}{l} \sum_j a_{ij}y_j = v \quad i = 1, \cdots, m \\ \sum_j x_j = 1 \end{array}\right\} \tag{9.3.2}$$

如果方程组(9.3.1)和(9.3.2)存在非负解 x^* 和 y^*，则便求得了对策的一个解 (x^*, y^*). 如果由上述两个方程组求出解 x^* 和 y^* 中有负的分量，则可视具体情况，将(9.3.1)和(9.3.2)中的某些等式改成不等式，继续试算求解，直至求出对策的解。这种方法由于事先假设 x^* 和 y^* 均不为零，故当 x^* 和 y^* 的实际分量中有些为零时，(9.3.1)和(9.3.2)一般无非负解，而下面的试算过程则是无固定规程可循的。因此，这种方法在实际应用中具有一定的局限性。

【例 9.11】 求解矩阵对策——“齐王赛马”

解　已知齐王的赢得矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}3&1&1&1&1&-1\\1&3&1&1&-1&1\\1&-1&3&1&1&1\\-1&1&1&3&1&1\\1&1&-1&1&3&1\\1&1&1&-1&1&3\end{bmatrix}$$

易知，A 没有鞍点，即对齐王和田忌来说都不存在最优纯策略。设齐王和田忌的最优混合策略为 $x^*=(x_1^*,x_2^*,x_3^*,x_4^*,x_5^*,x_6^*)^T$ 和 $y^*=(y_1^*,y_2^*,y_3^*,y_4^*,y_5^*,y_6^*)^T$. 从矩阵 A 的元素来看，每个局中人选取每个纯策略的可能性都是存在的，故可事先假定 $x_i^*>0$ 和 $y_j^*>0, i=1,\cdots,6,\ j=1,\cdots,6$. 于是求解线性方程组

$$\begin{cases}3x_1+x_2+x_3-x_4+x_5+x_6=v\\x_1+3x_2-x_3+x_4+x_5+x_6=v\\x_1+x_2+3x_3+x_4-x_5+x_6=v\\x_1+x_2+x_3+3x_4+x_5-x_6=v\\x_1-x_2+x_3+x_4+3x_5+x_6=v\\-x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+3x_6=v\\x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=1\end{cases}$$

和

$$\begin{cases}3y_1+y_2+y_3+y_4+y_5-y_6=v\\y_1+3y_2+y_3+y_4-y_5+y_6=v\\y_1-y_2+3y_3+y_4+y_5+y_6=v\\-y_1+y_2+y_3+3y_4+y_5+y_6=v\\y_1+y_2-y_3+y_4+3y_5+y_6=v\\y_1+y_2+y_3-y_4+y_5+3y_6=v\\y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6=1\end{cases}$$

得到

$$x_i=\frac{1}{6}\quad i=1,2,\cdots,6$$

$$y_j=\frac{1}{6}\quad j=1,2,\cdots,6$$

$$v=1$$

故齐王和田忌的最优混合策略为 $x^*=\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)^T$ 和 $y^*=\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)^T$，对策的值（齐王的期望赢得）为 $V_G=1$. 这与我们的设想相符，即双方都以 1/6 的概率选取每个纯策略，或者说每个纯策略被选取的机会应是均等的，则总的结局应该是：齐王有 5/6 的机会赢田忌，赢得的期望值是 1 千金。但是，如果齐王在每出一匹马前将自己的选择告诉了对方，这实际上等于公开了自己的策略，如齐王选取出马次序为（上，中，下），则田忌根据谋士的建议便以（下，上，中）对之，结果田忌反而可得千金。因此，在矩阵对策

不存在鞍点时，竞争的双方在开局前均应对自己的策略(实际上是纯策略)加以保密，否则不保密的一方是要吃亏的。

【例 9.12】 某厂用三种不同的设备 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 加工三种不同的产品 β_1,β_2,β_3. 已知三种设备分别加工三种产品时，单位时间内创造的价值由表 9.2 给出。

表 9.2

		被加工产品		
		β_1	β_2	β_3
使用设备	α_1	3	−2	4
	α_2	−1	4	2
	α_3	2	2	6

出现负值是由于设备的消耗大于创造出的价值。在上述条件下，求出一个合理的加工方案。

解 此问题可看成是一个矩阵对策问题，并易知没有鞍点。设采用设备 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的概率分别为$(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，产品 β_1,β_2,β_3 被接受加工的概率分别为$(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$.

为简化求解计算，由定理 9.7，转而求赢得矩阵为

$$\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}-(2)_{3\times3}=\begin{bmatrix}1&-4&2\\-3&2&0\\0&0&4\end{bmatrix}$$

的矩阵对策 G'，为此，先求解等式组：

$$\left.\begin{aligned}x_1-3x_2\qquad&=v'\\-4x_1+2x_2\qquad&=v'\\2x_1\qquad+4x_3&=v'\\x_1+\ x_2+\ x_3&=1\end{aligned}\right\}\tag{9.3.3}$$

和

$$\left.\begin{aligned}y_1-4y_2+2y_3&=v'\\-3y_1+2y_2\qquad&=v'\\4y_3&=v'\\y_1+\ y_2+\ y_3&=1\end{aligned}\right\}\tag{9.3.4}$$

经过实际计算，知道上述等式组不存在非负解。于是根据试算，将(9.3.3)中第 3 式取为不等式，将(9.3.4)中第 1 式取为不等式，转而求解

$$\left.\begin{aligned}x_1-3x_2\qquad&=v'\\-4x_1+2x_2\qquad&=v'\\2x_1\qquad+4x_3&>v'\\x_1+\ x_2+\ x_3&=1\end{aligned}\right\}\tag{9.3.5}$$

和

$$\left.\begin{aligned}y_1-4y_2+2y_3&<v'\\-3y_1+2y_2\qquad&=v'\\4y_3&=v'\\y_1+\ y_2+\ y_3&=1\end{aligned}\right\}\tag{9.3.6}$$

由定理 9.6,(9.3.5)和(9.3.6)的解 x^* 及 y^* 中的分量 $x_1^*=0, y_3^*=0$. 将此结果代回上面两组不等式,得到

$$x_2^*=0, \quad x_3^*=1$$

$$y_1^*=\frac{2}{5}, \quad y_2^*=\frac{3}{5}$$

$$v'=0$$

故原对策最优解为 $x^*=(0,0,1)^T$, $y^*=\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5},0\right)^T$, 对策值(单位时间内创造价值的期望值) $V_G=v'+2=2$。

(4) 迭代法

迭代法是求解矩阵对策的一种近似方法。其基本思想是:假设两个局中人反复进行对策多次,在每一局中各局中人都从自己的策略集中选取一个使对方获得最不利结果的纯策略,即第 k 局对策纯策略的选择欲使对手在前 $k-1$ 局中的累计所得(或累计所失)最少(或最多)。具体做法是:在第 1 局中,从两个局中人中任选一人,例如局中人Ⅰ,让他先采取任意一个纯策略,例如 α_i. 然后,局中人Ⅱ随之采取某纯策略 β_j,使采取了 α_i 的局中人Ⅰ的所得为最少。在第 2 局中,局中人Ⅰ认为局中人Ⅱ还将出 β_j,故采取某一策略 α_i 使局中人Ⅱ所失为最多,然后局中人Ⅱ又采取某一策略使局中人Ⅰ在这两局中的累计赢得为最少。在第 3 局中,局中人Ⅰ又采取某一策略使局中人Ⅱ在前两局的累计所失为最多,然后局中人Ⅱ又采取某一策略使其对手在这三局中的累计所得为最少。以后各局均照此方式对策下去,直到迭代的结果达到一定的满意程度为止。当迭代结束时,我们就用局中人各纯策略在已进行的 N 局对策(N 步迭代)中出现的频率分布作为最优混合策略中概率分布的一个近似。

下面用例子来说明这种迭代法的求解过程。

【例 9.13】 两个局中人进行对策,规则是二人互相独立地各自从 1,2,3 这三个数字中任意选写一个数字。如果二人所写数字之和为偶数,则局中人Ⅱ付给局中人Ⅰ以数量为此和数的报酬;如果二人所写数字之和为奇数,则局中人Ⅰ付给局中人Ⅱ以数量为此和数的报酬,试求出此对策的解。

解 显然,这是一个 3×3 矩阵对策, $S_1=S_2=\{1,2,3\}$ 容易得到局中人Ⅰ的赢得矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}2 & -3 & 4\\ -3 & 4 & -5\\ 4 & -5 & 6\end{bmatrix}$$

易见 A 没有鞍点。为了求解方便,将 A 的各元素都加上 5,得到新的对策矩阵

$$A=\begin{bmatrix}7 & 2 & 9\\ 2 & 9 & 0\\ 9 & 0 & 11\end{bmatrix}$$

下面求解。假设局中人Ⅰ在第一局中先取策略 α_3,其赢得情况见表 9.3。

表 9.3

局 数	局中人Ⅰ	β_1	β_2	β_3
1	α_3	9	0	11
累计所得		9	<u>0</u>	11

其中以 0 为最少，故局中人Ⅱ出策略 β_2，则其支付情况见表 9.4。

表 9.4

局　数	局中人Ⅱ	α_1	α_2	α_3
1	β_2	2	9	0
累计所失		2	$\overline{9}$	0

其中以 9 为最多，故局中人Ⅰ在下一局将出策略 α_2，第 2 局中，局中人Ⅰ出 α_2，其赢得情况见表 9.5。

表 9.5

局　数	局中人Ⅰ	β_1	β_2	β_3
1	α_3	9	0	11
2	α_2	2	9	0
累计所得		11	$\underline{9}$	11

其中以 9 为最少，故局中人Ⅱ出策略 β_2，其支付情况见表 9 .6。

表 9.6

局　数	局中人Ⅱ	α_1	α_2	α_3
2	β_2	2	9	0
2	β_2	2	9	0
累计所失		4	$\overline{18}$	0

其中以 18 为最多，故局中人Ⅰ在下一局将出 α_2。以下各局的计算是相同的，主要是要计算出以往对策得失的累计值，作为下一步选取策略的依据。表 9.7 给出了迭代过程前 30 局的计算结果 4.5。表中第 3,4,5 列为局中人Ⅰ的前 N 局累计所得值，并在最小值下标横线。

如果有两个以上的最小值，则可以在其中任一值下面横线(当仅有两个相同最小值时，一般应在不同于最近一次出过的策略所对应的最小值下标横线)。表中第 7,8,9 列为局中人Ⅱ的前 N 局累计所失值，并在最大值上标横线。由表可看出，标以横线的数字所对应的策略，即为下一步另一局中人所采取的策略。表中的第 10 列为局中人Ⅰ的前 N 局累计所得中的最小值除以对策局数 N，用 $\underline{V}_N$ 表示。设在前 N 局中，局中人Ⅰ取 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的次数分别为 k_1, k_2 和 $k_3(k_1+k_2+k_3=N)$，则

$$\underline{V}_N = \left(\min_{1\leqslant j\leqslant 3}\sum_{i=1}^{3} a_{ij}k_i\right)\Big/N$$

表中第 11 列为局中人Ⅱ的前 N 局累计所失中的最大值除以对策局数 N，用 V_N 表示。设在前 N 局中，局中人Ⅱ取 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的次数分别为 $l_1, l_2, l_3(l_1+l_2+l_3=N)$，则

$$\overline{V}_N = \left(\max_{1\leqslant j\leqslant 3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}l_j\right)\Big/N$$

表中最后一列我们称为对策的平均赢得，记为 V_N，其中

$$V_N = \frac{\underline{V}_N + \overline{V}_N}{2}$$

即可做为对策的近似值。

表 9.7

局　数/N	Ⅰ	β_1	β_2	β_3	Ⅱ	α_1	α_2	α_3	$\underline{V}_N$	$\overline{V}_N$	V_N
1	α_3	9	$\underline{0}$	11	β_2	2	$\overline{9}$	0	0	9	4.50
2	α_2	11	$\underline{9}$	11	β_2	4	$\overline{18}$	0	4.5	9	6.75
3	α_2	13	18	$\underline{11}$	β_3	13	$\overline{18}$	11	3.67	6.00	4.84
4	α_2	15	27	$\underline{11}$	β_3	$\overline{22}$	18	22	2.75	5.50	4.13
5	α_1	22	29	$\underline{20}$	β_3	31	18	$\overline{33}$	4.00	6.61	5.30
6	α_3	31	$\underline{29}$	31	β_2	$\overline{33}$	27	33	4.83	6.50	5.16
7	α_1	38	$\underline{31}$	40	β_2	35	$\overline{36}$	33	4.43	5.14	4.79
8	α_2	40	$\underline{40}$	40	β_2	37	$\overline{45}$	33	5.00	5.62	5.31
9	α_2	42	49	$\underline{40}$	β_3	$\overline{46}$	45	44	4.44	5.11	4.78
10	α_1	$\underline{49}$	51	49	β_1	53	47	$\overline{53}$	4.90	5.30	5.10
11	α_3	58	$\underline{51}$	60	β_2	55	$\overline{56}$	53	4.63	5.09	4.86
12	α_2	60	$\underline{60}$	60	β_2	57	$\overline{65}$	53	5.00	5.41	5.20
13	α_2	62	69	$\underline{60}$	β_3	$\overline{66}$	65	64	4.62	5.08	4.85
14	α_1	$\underline{69}$	71	69	β_1	73	67	$\overline{73}$	4.95	5.21	5.07
15	α_3	78	$\underline{71}$	80	β_2	75	$\overline{76}$	73	4.74	5.07	4.91
16	α_2	80	$\underline{80}$	80	β_2	77	$\overline{85}$	73	5.00	5.31	5.15
17	α_2	82	89	$\underline{80}$	β_3	$\overline{86}$	85	84	4.71	5.07	4.89
18	α_1	$\underline{89}$	91	89	β_1	93	87	$\overline{93}$	4.94	5.16	5.05
19	α_3	98	$\underline{91}$	100	β_2	95	$\overline{96}$	93	4.79	5.05	4.92
20	α_2	100	$\underline{100}$	100	β_2	97	$\overline{105}$	93	5.00	5.25	5.12
21	α_2	102	109	$\underline{100}$	β_3	$\overline{106}$	105	104	4.77	5.05	4.91
22	α_1	$\underline{109}$	111	109	β_1	113	107	$\overline{113}$	4.95	5.14	5.05
23	α_3	118	$\underline{111}$	120	β_2	115	$\overline{116}$	113	4.83	5.04	4.94
24	α_2	120	$\underline{120}$	120	β_2	117	$\overline{125}$	113	5.00	5.20	5.10
25	α_2	122	129	$\underline{120}$	β_3	$\overline{126}$	125	124	4.80	5.04	4.92
26	α_1	$\underline{129}$	131	129	β_1	133	127	$\overline{133}$	4.97	5.12	5.05
27	α_3	138	$\underline{131}$	140	β_2	135	$\overline{136}$	133	4.85	5.04	4.95
28	α_2	140	$\underline{140}$	140	β_2	137	$\overline{145}$	133	5.00	5.18	5.09
29	α_2	142	149	$\underline{140}$	β_3	$\overline{146}$	145	144	4.83	5.04	4.94
30	α_1	$\underline{149}$	151	149	β_1	153	147	$\overline{153}$	4.98	5.10	5.04

例 9.13 中，当 $N=30$ 时，局中人Ⅰ出 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的次数分别为 8, 15, 7；局中人Ⅱ出 β_1, β_2, β_3 的次数分别为 6, 15, 9，故得

$$x^* = (8/30, 15/30, 7/30)^{\mathrm{T}} \approx (0.267, 0.500, 0.233)^{\mathrm{T}}$$

$$y^* = (6/30, 15/30, 9/30)^{\mathrm{T}} \approx (0.200, 0.500, 0.300)^{\mathrm{T}}$$

新对策的值约为 5.04，故原对策的值近似为零。

在结束本例时应指出，若记对策的值为 V_G，则对任意的 N，总有

$$\underline{V}_N \leqslant V_G \leqslant \overline{V}_N \tag{9.3.7}$$

(习题 17)。而且理论上已经证明，如果上述迭代过程不断进行下去，则平均赢得 V_N 将趋于对策的值 V_G，各策略的频率分布将趋于最优策略的概率分布。即若记在 N 局对策中局中人Ⅰ出 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 的次数分别为 $k_1, \cdots, k_m$，局中人Ⅱ出 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 的次数分别为 $l_1, \cdots, l_n$，

$$x_N = (k_1/N, \cdots, k_m/N)^{\mathrm{T}}$$

$$y_N = (l_1/N, \cdots, l_n/N)^{\mathrm{T}}$$

则 $\{x_N\}$ 的每一收敛子列都收敛于局中人Ⅰ的一个最优策略，$\{y_N\}$ 的每一收敛子列都收敛于局中人Ⅱ的一个最优策略。

上述迭代方法计算简便，易于上机计算，并可推广到多人对策的情形。缺点是收敛速度较慢。

9.3.2 线性规划方法

由定理 9.5 已知，任一矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; \boldsymbol{A}\}$ 的求解均等价于一对互为对偶的线性规划问题，而定理 9.4 表明，对策 G 的解 x^* 和 y^* 等价于下面两个不等式组的解。

$$(\mathrm{I})\begin{cases} \sum_i a_{ij} x_i \geqslant v & j = 1, \cdots, n \\ \sum_i x_i = 1 \\ x_i \geqslant 0 & i = 1, \cdots, m \end{cases} \tag{9.3.8}$$

$$(\mathrm{II})\begin{cases} \sum_j a_{ij} y_j \leqslant v & i = 1, \cdots, m \\ \sum_j y_j = 1 \\ y_j \geqslant 0 & j = 1, \cdots, n \end{cases} \tag{9.3.9}$$

其中

$$v = \max_{x \in S_1^*} \min_{y \in S_2^*} E(x, y) = \min_{y \in S_2^*} \max_{x \in S_1^*} E(x, y) \tag{9.3.10}$$

就是对策的值 V_G。

定理 9.11 设对策矩阵 $G = \{S_1, S_2; \boldsymbol{A}\}$ 的值为 V_G，则

$$V_G = \max_{x \in S_1^*} \min_{1 \leqslant j \leqslant n} E(x, j) = \min_{y \in S_2^*} \max_{1 \leqslant i \leqslant m} E(i, y)$$

证明 因 V_G 是对策的值，故

$$V_G = \max_{x \in S_1^*} \min_{y \in S_2^*} E(x, y) = \min_{y \in S_2^*} \max_{x \in S_1^*} E(x, y)$$

一方面，任给 $x \in S_1^*$，有

$$\min_{1 \leqslant j \leqslant n} E(x, j) \geqslant \min_{y \in S_2^*} E(x, y)$$

故

$$V_G = \max_{x \in S_1^*} \min_{1 \leqslant j \leqslant n} E(x, j) \geqslant \max_{x \in S_1^*} \min_{y \in S_2^*} E(x, y) \tag{9.3.11}$$

另一方面，任给 $x \in S_1^*$，$y \in S_2^*$，有

$$E(x,y)=\sum_{j=1}^{n}E(x,j)\cdot y_j \geqslant \min_{1\leqslant j\leqslant n}E(x,j)$$

故

$$\min_{y\in S_2^*}E(x,y)\geqslant \min_{1\leqslant j\leqslant n}E(x,j)$$

$$\max_{x\in S_1^*}\min_{y\in S_2^*}E(x,y)\geqslant \max_{x\in S_1^*}\min_{1\leqslant j\leqslant n}E(x,j) \tag{9.3.12}$$

由式(9.3.11)和式(9.3.12)得

$$V_G=\max_{x\in S_1^*}\min_{1\leqslant j\leqslant n}E(x,j)$$

同理可证

$$V_G=\min_{y\in S_2^*}\max_{1\leqslant i\leqslant m}E(i,y)$$

证毕。

下面我们给出求解矩阵对策的线性规划方法：

作变换(根据定理 9.7,不妨设 $v>0$)：

$$x_i'=\frac{x_i}{v}\quad i=1,\cdots,m \tag{9.3.13}$$

则不等式组(9.3.8)变为

$$(\text{I}')\begin{cases}\sum\limits_i a_{ij}x_i'\geqslant 1 & j=1,\cdots,n\\ \sum\limits_i x_i'\dfrac{1}{v}=\dfrac{1}{v} & \\ x_i'\geqslant 0 & i=1,\cdots,m\end{cases} \tag{9.3.14}$$

根据定理 9.11, $v=\max\limits_{x\in S_1^*}\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\sum\limits_i a_{ij}x_i$.这样,不等式组(9.3.14)即等价于线性规划问题：

$$(\text{P})\begin{cases}\min\ z=\sum\limits_i x_i'\\ \sum\limits_i a_{ij}x_i'\geqslant 1 & j=1,\cdots,n\\ x_i'\geqslant 0\end{cases}$$

同理,作变换

$$y_j'=\frac{y_i}{v}\quad j=1,\cdots,n$$

则不等式组(9.3.9)变为

$$(\text{II}')\begin{cases}\sum\limits_i a_{ij}y_i'\leqslant 1 & i=1,\cdots,m\\ \sum\limits_j y_j'=\dfrac{1}{v} & \\ y_j'\geqslant 0 & j=1,\cdots,n\end{cases}$$

其中 $v=\min\limits_{y\in S_2^*}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\sum\limits_j a_{ij}y_j$,与之等价的线性规划问题是：

$$
(\mathrm{D})\begin{cases}\max\ w = \sum_j y_j' \\ \sum_j a_{ij}y_j' \leqslant 1 \quad i = 1,\cdots,m \\ y_j' \geqslant 0 \qquad j = 1,\cdots,n\end{cases}
$$

显然,问题(P)和(D)是互为对偶的线性规划,故可利用单纯形或对偶单纯形方法求解。在求解时,一般先求问题(D)的解,因为这样容易在迭代的第一步就找到第一个基本可行解,而问题(P)的解从问题(D)的最后一个单纯形表上即可得到。当求得问题(P)和(D)的解后,再利用变换(9.3.13)和(9.3.14)即可求出原对策问题的解及对策值。

【例 9.14】 利用线性规划方法求解赢得矩阵为

$$
\boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix}7 & 2 & 9\\ 2 & 9 & 0\\ 9 & 0 & 11\end{bmatrix}
$$

的矩阵对策。(同例 9.13 中的 $\boldsymbol{A}'$)

解 求解问题可化成两个互为对偶的线性规划问题:

$$
(\mathrm{P})\begin{cases}\min(x_1+x_2+x_3)\\ 7x_1+2x_2+9x_3\geqslant 1\\ 2x_1+9x_2 \geqslant 1\\ 9x_1 + 11x_3\geqslant 1\\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0\end{cases}
$$

$$
(\mathrm{D})\begin{cases}\max(y_1+y_2+y_3)\\ 7y_1+2y_2+9y_3\leqslant 1\\ 2y_1+9y_2 \leqslant 1\\ 9y_1 + 11y_3\leqslant 1\\ y_1,y_2,y_3\geqslant 0\end{cases}
$$

利用单纯形方法求解问题(D),迭代过程如表 9.8 所示。从表中可得到问题(D)的解为

$$
\begin{cases}\boldsymbol{y}=\left(\frac{1}{20},\frac{1}{10},\frac{4}{80}\right)^{\mathrm{T}}=\left(\frac{1}{20},\frac{1}{10},\frac{1}{20}\right)^{\mathrm{T}}\\ w=\frac{16}{80}\end{cases}
$$

由表 9.8 中最后一个单纯形表可得问题(P)的解为:

$$
\begin{cases}\boldsymbol{x}=\left(\frac{4}{80},\frac{8}{80},\frac{4}{80}\right)^{\mathrm{T}}=\left(\frac{1}{20},\frac{1}{10},\frac{1}{20}\right)^{\mathrm{T}}\\ z=\frac{16}{80}\end{cases}
$$

于是

$$
V_{G'}=\frac{80}{16}=5
$$

$$
\boldsymbol{x}^*=V_{G'}\cdot\left(\frac{1}{20},\frac{1}{10},\frac{1}{20}\right)^{\mathrm{T}}=\left(\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{1}{4}\right)^{\mathrm{T}}
$$

$$y^* = V_{G'} \cdot \left(\frac{1}{20}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}\right)^{\mathrm{T}}$$

（读者可把例 9.13 中得到的近似解同这里得到的准确解进行一下比较。）

至此，我们介绍了一些求解矩阵对策的方法。在求解一个矩阵对策时，应首先判断其是否具有鞍点，当鞍点不存在时，利用优超原则和定理 9.7，定理 9.8 等提供的方法将原对策的赢得矩阵尽量地简化，然后再利用本节介绍的各种方法去求解。

表 9.8

c_j			1	1	1	0	0	0	w
c_B	x_B	b	y_1	y_2	y_3	u_1	u_2	u_3	
0	u_1	1	7	2	9	1	0	0	
0	u_2	1	2	9	0	0	1	0	
0	u_3	1	[9]	0	11	0	0	1	
$c_j - z_j$			1	1	1	0	0	0	0
0	u_1	2/9	0	2	4/9	1	0	−7/9	
0	u_2	7/9	0	[9]	−22/9	0	1	−2/9	
1	y_1	1/9	1	0	11/9	0	0	1/9	
$c_j - z_j$			0	1	−2/9	0	0	−1/9	1/9
0	u_1	4/81	0	0	[80/81]	1	−2/9	−59/81	
1	y_2	7/81	0	1	−22/81	0	1/9	−2/81	
1	y_1	1/9	1	0	11/9	0	0	1/9	
$c_j - z_j$			0	0	4/81	0	−1/9	−7/81	16/81
1	y_3	4/80	0	0	1	81/80	−18/80	−59/80	
1	y_2	1/10	0	1	0	22/80	4/80	−18/80	
1	y_1	1/20	1	0	0	−99/80	22/80	81/80	
$c_j - z_j$			0	0	0	−4/80	−8/80	−4/80	16/80

在本节介绍的各类求解方法中，迭代法和线性规划方法是具有一般性的，另外还有两种具有一般性的解法：求全部解的矩阵法和至少保证求出一个解的微分方程法。限于内容的原因，这里就不作介绍了，有兴趣的读者可参阅参考文献[19]。

9.3.3 注 记

本章主要介绍的是两人有限零和对策，但实际对策过程中各局中人的赢得往往是非零和的，例如两个球队的比赛，特别是某些经济过程中的对策模型，一般都是非零和的，因为许多经济活动过程都是创造新价值的。因此，对于非零和对策研究就显得十分重要了。

一般，两人有限非零和对策可用 $G=\{S_1, S_2; (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})\}$ 表示，其中 S_1 和 S_2 分别为局中人Ⅰ和Ⅱ的策略集，矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 为局中人Ⅰ的赢得矩阵，矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 为局中人Ⅱ的赢得矩阵，$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})=(a_{ij}, b_{ij})_{m\times n}$，一般 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\neq 0$，这类对策亦称为双矩阵对策，可见，矩阵对策($\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=0$)是双矩阵对策的一种特例。

定义 9.6 设 $G=\{S_1, S_2; (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})\}$ 为双矩阵对策，$\boldsymbol{x}^* \in S_1^*$，$\boldsymbol{y}^* \in S_2^*$. 如果对任给 $\boldsymbol{x}^* \in S_1^*$ 和 $\boldsymbol{y}^* \in S_2^*$ 有

$$x^{\mathrm{T}}Ay^{*} \leqslant x^{*\mathrm{T}}Ay^{*}$$
$$x^{*\mathrm{T}}By \leqslant x^{*\mathrm{T}}Ay^{*}$$

则称(x^{*}, y^{*})为双矩阵对策 G 的平衡局势。

已经证明：任一双矩阵对策的平衡局势都是存在的，但至今尚未得到较一般的求解方法，矩阵对策的某些性质不能平行地推广到双矩阵对策，这是求解双矩阵对策的困难之一。对于 2×2 双矩阵对策，已得到了令人较满意的结果。

习　题

1. 甲、乙两名儿童玩游戏，双方可分别出拳头（代表石头）、手掌（代表布）、两个手指（代表剪刀），规则是：剪刀赢布，布赢石头，石头赢剪刀，赢者得一分。若双方所出相同算和局，均不得分。试列出儿童甲的赢得矩阵。

2. "二指莫拉问题"。甲、乙二人游戏，每人出一个或两个手指，同时又把猜测对方所出的指数叫出来。如果只有一个人猜测正确，则他所赢得的数目为二人所出指数之和，否则重新开始。写出该对策中各局中人的策略集合及甲的赢得矩阵，并回答局中人是否存在某种出法比其他出法更为有利。

3. 求解下列矩阵对策，其中赢得矩阵 A 分别为

(a) $\begin{bmatrix} -1 & 12 & -4 \\ 1 & 4 & 8 \\ -5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$　　(b) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$　　(d) $\begin{bmatrix} 9 & 3 & 1 & 8 & 0 \\ 6 & 5 & 4 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & 8 \\ 5 & 6 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$.

4. 证明本章 9.2.1 节中的性质 1 和性质 2。

5. 甲、乙两个企业生产同一种电子产品，两个企业都想通过改革管理获取更多的市场销售份额。甲企业的策略措施有：①降低产品价格；②提高产品质量，延长保修年限；③推出新产品。乙企业考虑的措施有：①增加广告费用；②增设维修网点，扩大维修服务；③改进产品性能。假定市场分额一定，由于各自采取的策略措施不同，通过预测，今后两个企业的市场占有份额变动情况如表 9.9 所示（正值为甲企业增加的市场占有份额，负值为减少的市场占有份额）。试通过对策分析，确定两个企业各自的最优策略.

表 9.9

		乙企业策略		
		1	2	3
甲企业策略	1	10	−1	3
	2	12	10	−5
	3	6	8	5

6. 证明定理 9.2。

7. 证明定理 9.4。

8. 证明定理 9.7，定理 9.8 和定理 9.9。

9. 设 G 为 2×2 对策，且不存在鞍点。证明若 $x^{*}=(x_1^{*}, x_2^{*})^{\mathrm{T}}$ 和 $y^{*}=(y_1^{*}, y_2^{*})^{\mathrm{T}}$ 是 G 的解，则

$$x_i^{*}>0 \quad i=1,2,$$
$$y_j^{*}>0 \quad j=1,2.$$

10. 证明:矩阵对策

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

的鞍点不存在的充要条件是有一条对角线的每一个元素均大于另一对角线上的每一元素。

11. 推导 2×2 对策的求解公式,并由习题 10 的结果证明习题 9。

12. 设 $m \times m$ 对策的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

其中当 $i \neq j$ 时,$a_{ij}=1$,当 $i=j$ 时,$a_{ij}=-1$。证明此对策的最优策略为

$$x^*=y^*=\left(\frac{1}{m},\frac{1}{m},\cdots,\frac{1}{m}\right)^{\mathrm{T}}$$

$$V_G=\frac{m-2}{m}.$$

13. 利用优超原则求解下列矩阵对策

(a)

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 5 & 9 \\ 7 & 3 & 9 & 5 & 9 \\ 4 & 6 & 8 & 7 & 6 \\ 6 & 0 & 8 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

14. 利用图解法求解下列矩阵对策,其中 A 为

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 5 & 7 & -6 \\ -6 & 0 & 4 \\ 7 & 8 & 5 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & -1 \\ -4 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 8 & 5 & 2 \end{bmatrix}$.

15. 已知矩阵对策

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

的解为 $x^*=(6/13,3/13,4/13)^{\mathrm{T}}$,$y^*=(6/13,4/13,3/13)^{\mathrm{T}}$,对策值为 24/13。求下列矩阵对策的解,其赢得矩阵 A 分别为

(a) $\begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 10 \\ 2 & 8 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 6 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 32 & 20 & 20 \\ 20 & 20 & 44 \\ 20 & 38 & 20 \end{bmatrix}$.

16. 用迭代法求解矩阵对策,其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}. \qquad \text{(迭代 10 步)}$$

17. 证明本章中的(9.3.7)式。

18. 用线性规划方法求解下列矩阵对策,其中 $\boldsymbol{A}$ 为

(a) $\begin{bmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 6 \\ 6 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

参考文献

1 Balas, E., Zemel, E.. An algorithm for large zero—one knapsack problem. Operations Research, vol. 28 (1980), 1130~1154

2 Gomory, E.R. Outline of an algorithm for integer solution to linear programs. Bull. Amer. Math. Soc. 64, 1958, 275~278

3 Harthey, R. Linear and nonlinear programming: An introduction to linear methods in mathematical programming, Ellis Horwood L.t. England, 1985

4 Ignizio, J.P. 单目标和多目标系统线性规划.李毅华, 谭玮译. 上海:同济大学出版社, 1986

5 卢开澄. 单目标、多目标与整数规划. 北京:清华大学出版社, 1999

6 马仲蕃. 线性整数规划的数学基础. 北京:科学出版社, 1998

7 Mogilevskaya, R.L.; Shvartsma, P.A. On the correction of free terms of an inconsistent system of linear inequalities(Russian). Ekonom. i Mat. Metoday, Vol.24(1988), 147~154

8 聂义勇等. 考虑库存余材利用的杆材下料方案. 小型微型计算机系统, Vol.22 (2001) No.7, 830~832

9 Nie, Y.Y.; et al. Incompletely enumerative solution for 1D cutting—stock problem, The First Chinese-Korean Joint Workshop on Recent Advances in Numerical Analysis and Its Applications. Seoul, Korea, Feb. 19~23, 2001

10 Nie, Y.Y.; Xu, S.R. An isometric plane method for linear programming. J.Compt. Math. Vol.9(1991) No.3, 262~272

11 Nie, Y.Y.; Xu, S.R. Determination and correction of an inconsistent system of linear inequalities. J.Comput. Math. Vol.13 (1995) No.3, 211~217

12 钱颂迪等. 运筹学. 北京:清华大学出版社, 1990

13 Saaty, T.L. Optimization in integers and related extremal problems. McGraw-Hill, New York, 1970

14 石钟慈. 第三种科学方法——计算机时代的科学计算. 北京:清华大学出版社, 2000

15 Smale, S. On the average number of steps of the simplex method of linear programming. Math. Programming, Vol. 27(1983). 241~262

16 Taha, H.A. Integer programming. Academic Press, New York, 1975

17 魏国华, 傅家良, 周仲良. 实用运筹学. 上海:复旦大学出版社, 1987

18 张莹. 运筹学基础. 北京:清华大学出版社, 1994

19 中科院数学所二室. 对策论(博弈论)讲义. 北京:人民教育出版社, 1960